

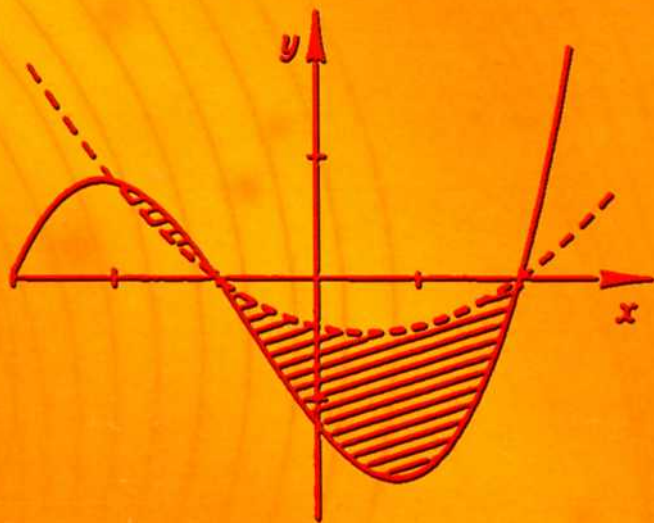
В. И. РЫЖИК, Т. Х. ЧЕРКАСОВА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

ПО АЛГЕБРЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ

РЫЖИК
ЧЕРКАСОВА



10-11

В. И. Рыжик, Т. Х. Черкасова

**ДИДАКТИЧЕСКИЕ
МАТЕРИАЛЫ
по АЛГЕБРЕ
и МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ
с ОТВЕТАМИ и РЕШЕНИЯМИ
для 10–11 классов**

Учебное пособие для профильной школы

**Санкт-Петербург
СМИО Пресс
2008**

Рыжик В. И.

- Р 43** Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу с ответами и решениями для 10–11 классов. Учебное пособие для профильной школы / В. И. Рыжик, Т. Х. Черкасова. – СПб: СММО Пресс, 2008. – 428 с.

Книга содержит: 1) задачи по школьному курсу алгебры и математического анализа для профильных классов, в первую очередь для классов с углублённым изучением математики; 2) ответы ко всем задачам; 3) решения задач.

Книга адресована учителям математики, учащимся, обучающимся в школах различного типа, и абитуриентам.

Первое издание вышло в 1997 году. В новом издании изменены условия некоторых задач, внесены исправления в ответы, добавлены решения.

© Рыжик В. И., Черкасова Т. Х., 2008 г.

© Зинаида Якупова, оформление обложки, 2008 г.

ISBN 978-5-7704-0110-3

© СММО Пресс, 2008 г.

Редактор к. ф.-м. н. *Золотова Н. К.*
Художественный редактор *Соловьева Н. Д.*
Директор издательства *Морозова И. С.*

Издательство «СММО Пресс»,
СПб, ул. Седова, д. 97, к. 3, лит. А.
Тел. (812) 595-9476, (911) 290-90-26 (МТС), (961) 811-1749 (Вилайн)
e-mail: smiopress@mail.ru, <http://www.smio.ru>

Подписано в печать 04.10.07. Формат 60×90 ¹/₁₆. Усл.-печ. л. 3,6.
Печать офсетная. Тираж 1500. Заказ №657.

Отпечатано в СПб ГУП «Петроцентр» ОП «Пушкинская типография»
г. Пушкин, ул. Средняя, д. 3/8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено как для учителей, так и для всех учащихся, которые хотят продолжить свое математическое образование. Содержащиеся в книге задания один из авторов использует в практической работе более 15 лет.

Учителя, работающие в специализированных физико-математических классах, могут рассматривать задания как дидактические материалы по всему курсу алгебры и математического анализа. Учителя математики, работающие в массовой школе, могут использовать книгу для работы с более сильными учениками при прохождении программы, во время итогового повторения и при подготовке выпускников к вступительным экзаменам в вуз.

Задания в достаточной степени обеспечивают проверку усвоения принятой программы по математике в специализированных физико-математических классах. Более того, иногда они даже выходят за рамки этой программы, что отражает особенности преподавания математики в разных физико-математических классах, отличающихся тем, какое внимание уделяется физике.

Упражнения диагностируют и в целом обеспечивают готовность учеников к вступительному экзамену по математике не только в технические вузы, но и на факультеты, где требуется повышенная математическая подготовка выпускников школы, включая математические факультеты университетов.

Для проверки готовности к вступительным экзаменам в вузы в задания включены и некоторые «экзотические» задачи, например, решение логарифмических уравнений или неравен-

ства с произвольным основанием. Однако надо понимать, что серьезная подготовка к вступительному экзамену в конкретный вуз должна быть достаточно целенаправленной и не может быть полностью обеспечена сборником задач достаточно общего характера.

Материалы нацелены не только и даже не столько на проверку усвоения программы или на подготовку абитуриентов к вступительным экзаменам в вуз, сколько на подготовку школьника к получению высшего математического образования. Не секрет, что пройти барьер вступительных экзаменов для этого не самое главное. Гораздо важнее — умение хотя бы в простейших случаях заниматься математической деятельностью как таковой. Для этого требуется не только определенное математическое мастерство — разумеется, оно необходимо на вполне приличном уровне, который ясен из предлагаемого задачника.

Готовность к продолжению школьного математического образования предполагает определенные интеллектуальные знания специального характера. Подготовленный к нему ученик школы умеет разобраться в условиях задачи, в частности, понимает, насколько они достаточны для ее решения; он обладает более высокой логической культурой; довольно свободно переходит от аналитической постановки задачи к ее наглядной интерпретации и наоборот; умеет отыскивать примеры и контрпримеры для подтверждения или опровержения некоего предположения; умеет обобщать полученные результаты и т. д. Задачи, в которых от ученика требуются именно такие свойства интеллекта, есть по возможности в каждом задании.

И наконец, необходима способность, хотя бы в скромных масштабах (отнюдь не на уровне олимпиадных задач), к продуктивной математической деятельности. Поэтому, например, даже в чисто «технических» задачах предусмотрена возможность для поиска другого, более простого решения, чем «лобовое». Другие возможности для проявления учениками способностей к математике в процессе решения этих заданий почти целиком определяются деятельностью учителя математики. Одно дело — готовить учеников к выполнению заданий на основе аналогичных примеров, решенных публично, и совсем другое дело, когда ученики видят пример того или иного типа впервые на самостоятельной или контрольной работе. Если

мы хотим от наших учеников, чтобы они побыстрее отошли от школярства, необходимо поставить их в такие условия, где от «натасканности» мало толку — в разумных, конечно, пределах.

Эти задания можно использовать для самостоятельных и контрольных работ, для домашних заданий и текущей учебной работы. Самостоятельные работы мы предлагаем, как правило, на 1 час, а контрольные — на 2 часа. Вариантов два, и практика показывает, что этого вполне достаточно. Варианты почти аналогичны — это ставит учеников практически в равные условия и облегчает проверку их работ. В каждом варианте задачи, как правило, располагаются по мере возрастания их сложности. Поэтому ученикам при выборе последовательности решаемых задач предлагается действовать по своему усмотрению. Разумеется, учитель может дать для работы не все задание полностью, а некоторую его часть. Выставление отметки — дело учителя, и тут возможны только самые общие рекомендации. Например, совсем не обязательно, чтобы отличную отметку получали только ученики, выполнившие задание полностью. За одну работу можно поставить даже две отметки.

Как пособие для самопроверки этот задачник лучше использовать так: первый вариант решить, ориентируясь на ответ, а второй вариант — для закрепления тех умений, использовать которые понадобилось при решении задач первого варианта.

Отметим несколько особенностей пособия. Последовательность тем и заданий, а также их содержание не «привязаны» к конкретному учебнику. В наше время учитель может позволить себе не только роскошь выбора учебника и задачника, но даже составление собственной программы. Поэтому всегда можно из этих заданий скроить что-нибудь свое. Если в ответе тригонометрического уравнения написано, к примеру, $x = \pi k$ и никакой информации о числе k нет, то предполагается (по умолчанию), что k — любое целое число. Форма записи ответа при решении уравнения или неравенства не имеет, по нашему мнению, принципиального характера, поэтому возможны разные формы такой записи. То же замечание для записи числовых промежутков. Под монотонностью функции здесь понимается строгая монотонность. При исследовании непрерывной функции на

монотонность в ответах указаны открытые промежутки. Разумеется, можно было указать в этих случаях и замкнутые промежутки. Главный аргумент комплексного числа можно брать на промежутках от 0 до 2π и от $-\pi$ до π . В некоторых случаях учитель может разрешить использование калькулятора или компьютера.

Мы будем благодарны всем читателям, кто заметит в нашей книге те или иные просчеты и сообщит об этом в издательство.

Тема 1
ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Задание 1.1. Функциональная символика

Вариант 1

1. $y(x) = -x^2 + x - 1$.

Найдите: а) $y(0)$; б) $y(-\frac{1}{3})$; в) $y(\sqrt{3})$; г) $y(2x)$; д) $y(x+1)$;
е) $y(x+\Delta x) - y(x)$.

2.
$$f(t) = \begin{cases} t^{-2}, & \text{если } t \leq 1, \\ t+1, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Найдите: а) $f(0,9^{0,5})$; б) $f(0,8^{-1})$; в) $f(a^2+1)$.

3. $g(x) = \sin x + \cos 2x$.

Найдите: а) $g(\frac{\pi}{6})$; б) $g(-\frac{\pi}{2})$; в) $g(1)$; г) $g(x+\pi)$; д) $g(\frac{\pi}{2}-x)$.

4. Верно ли при любом $t \in (-1, 1)$ равенство $x(-t) = x(t)$, если $x(t) = \sqrt{1-t^2}$?

5. $h(x)$ — линейная функция, заданная на R . Вычислите $h(1)$, если $h(-1) = 0$, $h(0) = 1$.

Вариант 2

1. $y(x) = -x^2 - x - 1$.

Найдите: а) $y(0)$; б) $y(\frac{1}{2})$; в) $y(-\sqrt{3})$; г) $y(0,5x)$; д) $y(-x+1)$;
е) $y(x+\Delta x) - y(x)$.

2.
$$f(t) = \begin{cases} t^{-1}, & \text{если } t > 1, \\ -t+1, & \text{если } t \leq 1. \end{cases}$$

Найдите: а) $f(1,1^{0,5})$; б) $f(1,2^{-1})$; в) $f(a^2+1)$.

3. $g(x) = \cos x + \sin 2x$.

Найдите: а) $g(\frac{\pi}{6})$; б) $g(-\frac{\pi}{4})$; в) $g(-1)$; г) $g(x-\pi)$; д) $g(\frac{\pi}{2}-x)$.

4. Верно ли при любом $t \in (-1, 1)$ равенство $x(-t) = -x(t)$, если $x(t) = t - t^3$?

5. $h(x)$ — линейная функция, заданная на R . Вычислите $h(-1)$, если $h(1) = 0$, $h(0) = 1$.

Задание 1.2. Сложная функция

Вариант 1

1. $h(y) = (y^2 + 1)^{-1}$.

Вычислите: а) $h(0)$; б) $h(h(0))$.

2. $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = 3x - 1$, $y_3(x) = x^{-1}$.

Запишите $z(x) = (3x - 1)^{-3}$ как сложную функцию, составленную из трех данных функций.

3. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$.

а) Найдите $f_1(f_1(x))$. б) Найдите $f_2(f_2(x))$. в) Решите уравнение $f_2(f_1(x)) = f_1(f_2(x))$.

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0, \\ 1, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \varphi(x) = -f(x).$

Нарисуйте график: а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(\varphi(x))$.

5. Придумайте функцию, отличную от линейной, которая при любом x удовлетворяет равенству $f(f(x)) = f(x)$.

Вариант 2

1. $h(y) = (y^2 - 1)^{-1}$.

Вычислите: а) $h(0)$; б) $h(h(0))$.

2. $y_1(x) = x^5$, $y_2(x) = 0,5x - 1$, $y_3(x) = x^{-1}$.

Запишите $z(x) = (0,5x^5 + 1)^{-1}$ как сложную функцию, составленную из трех данных функций.

3. $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = \sqrt{x}$.

а) Найдите $f_1(f_1(x))$. б) Найдите $f_2(f_2(x))$. в) Решите уравнение $f_2(f_1(x)) = f_1(f_2(x))$.

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0, \\ -1, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \varphi(x) = -f(x).$

Нарисуйте график: а) $f(\varphi(x))$; б) $f(f(x))$.

5. Придумайте функцию, отличную от линейной, которая при любом x удовлетворяет равенству $f(-f(x)) = f(x)$.

Задание 1.3. Область определения функции

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{11-x}} + \sqrt{x}$; б) $g(y) = (1-y^2)^{-0.5}$;

в) $h(z) = (\sqrt{1-z^2} - 1)^{0.5}$.

2. Напишите уравнение какой-либо функции $y(x)$, которая определена при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме x , принадлежащих промежутку $[1, 2)$.

3. Решите уравнение $\sqrt{|x| - a} + \sqrt{a^2 - x^2} = a - 1$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{13-x}{x+3}} + \sqrt{-x}$; б) $g(y) = (y^2 - 1)^{-0.5}$;

в) $h(z) = (1 - \sqrt{1-z^2})^{0.5}$.

2. Напишите уравнение какой-либо функции $y(x)$, которая определена при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме x , принадлежащих промежутку $(-2, -1]$.

3. Решите уравнение $\sqrt{a - |x|} + \sqrt{x^2 - a^2} = -a$.

Задание 1.4. Область значений функции

Вариант 1

1. Найдите область значений функции:

а) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, если $0.5 \leq x \leq 2$;

б) $g(y) = |y - 1|$, если $-1 \leq y \leq 3$; в) $h(z) = 2 - \sin(2z)$.

2. В равносторонний треугольник со стороной 1 вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на стороне треугольника. Пусть длина этой стороны прямоугольника равна x . Выразите его площадь как функцию от x и установите, в каких границах она находится.

3. Решите уравнение $x^2 + x^{-2} = \sqrt{4 - x^{10}}$.

Вариант 2

1. Найдите область значений функции:
а) $f(x) = -2x^2 + x + 2$, если $-1 \leq x \leq 1$;
б) $g(y) = |y + 1|$, если $-3 \leq y \leq 1$; в) $h(z) = 1 + \cos(0,5z)$.
2. В прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой, равной 1, вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на гипотенузе треугольника. Пусть длина этой стороны прямоугольника равна x . Выразите его площадь как функцию от x и установите, в каких границах она находится.
3. Решите уравнение $x^2 + x^{-2} = \sqrt{4 - |x|}$.

Задание 1.5. Четность и нечетность функции

Вариант 1

1. Исследуйте функцию на четность и нечетность:
а) $f(x) = x^3 \cdot |x|$; б) $x(t) = t^4 - t + 1$;
в) $\varphi(a) = \sin a \cos a$; г) $g(y) = \frac{(|y| - 1)(y^3 - y^2)}{1 - y}$.
2. Функция $f(x)$ определена на R , четная и отлична от нуля. Исследуйте на четность и нечетность функцию:
а) $f_1(x) = f(-x)$; б) $f_2(x) = x \cdot f(x)$.
3. Найдите функцию f , которая определена на R , и такую, что при любом значении x выполняется равенство $f(x^2) = x$.

Вариант 2

1. Исследуйте функцию на четность и нечетность:
а) $f(x) = -x \cdot |x - 1|$; б) $x(t) = t^3 + t^2 - 1$;
в) $\varphi(a) = \cos^2 a - \sin^2 a$; г) $g(y) = \frac{(|y| + 1)(y^3 + y^2)}{1 + y}$.
2. Функция $f(x)$ определена на R , нечетная и отлична от нуля. Исследуйте на четность и нечетность функцию:
а) $f_1(x) = f(-x)$; б) $f_2(x) = x \cdot f(x)$.
3. Найдите функцию f , которая определена на R , и такую, что при любом значении x выполняется равенство $f(|x|) = -x$.

Задание 1.6. Четность и нечетность функции

Вариант 1

- Исследуйте функцию на четность и нечетность:
а) $h(z) = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}(-z)$; б) $f(x) = (x-1)^{-2} - (x+1)^{-2}$;
в) $g(y) = \sqrt{1+y+y^2} - \sqrt{1-y-y^2}$.
- Существует ли четная функция f , такая, что для любого x , отличного от нуля, выполняется равенство
$$f(x) + f(-x) = x?$$
- Может ли уравнение $|x| = (x^2 + 1)^5 - 1$ иметь 10 корней?

Вариант 2

- Исследуйте функцию на четность и нечетность:
а) $h(z) = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}(-z)$; б) $f(x) = (x+1)^{-2} - (1-x)^{-2}$;
в) $g(y) = \sqrt{6-5y+y^2} - \sqrt{6+5y-y^2}$.
- Существует ли нечетная функция $f(x)$, такая, что для любого x , отличного от нуля, выполняется равенство
$$f(x) - f(-x) = x^2?$$
- Может ли уравнение $x^2 = (|x|+1)^{10} - 1$ иметь 10 корней?

Задание 1.7. Монотонность функции

Вариант 1

- Исследуйте на монотонность функцию:
а) $f(x) = x^2 + x + 1$, если $x < -1$;
б) $g(y) = |y^{-1} - 1|$, если $y > 2$.
- Найдите промежутки монотонности функции:
а) $h(z) = \frac{2z+3}{3z+1}$; б) $f(a) = 3a^4 + |a| - 1$;
в) $y(x) = \begin{cases} x^{10}, & \text{если } x \geq 0, \\ x+1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Вариант 2

- Исследуйте на монотонность функцию:
а) $f(x) = x^2 - x + 1$, если $x > 1$;
б) $g(y) = |y^{-1} + 1|$, если $y < -2$.

2. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $h(z) = \frac{3z-1}{2z-3}$; б) $f(a) = -2a^6 - |a| + 1$;

в) $y(x) = \begin{cases} x^8, & \text{если } x \leq 0, \\ -x+1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

Задание 1.8. Монотонность функции

Вариант 1

1. Функции y и z возрастают на промежутке Δ . Будет ли на этом промежутке монотонной функция: а) $y \cdot z$; б) $y - z$?
2. Решите уравнение $\sqrt{x-9} + \sqrt{x+6} = 5$.
3. Верно ли неравенство $|x^2 - x| \leq -x^4 + 20$ при $1 \leq x \leq 2$?
4. Является ли функция $f(x)$ возрастающей на R , если при любом $x \in R$ выполняется неравенство $f(x) > f(x-1)$?

Вариант 2

1. Функции y и z возрастают на промежутке Δ . Будет ли на этом промежутке монотонной функция: а) $y + z$; б) $y:z$?
2. Решите уравнение $\sqrt{10-x} + \sqrt{7-x} = 3$.
3. Верно ли неравенство $|x^2 + x| \leq -x^4 + 20$ при $-2 \leq x \leq 1$?
4. Является ли функция $f(x)$ убывающей на R , если при любом $x \in R$ выполняется неравенство $f(x+1) < f(x)$?

Задание 1.9. Ограниченность функции

Вариант 1

1. Является ли заданная функция ограниченной и если да, то в каких границах лежат ее значения, если:
а) $y(x) = -3x + 10$ при $-2 \leq x \leq 3$;
б) $x(a) = a^2 - 2a + 3$ при $0 \leq a \leq 4$; в) $g(k) = \frac{k^2+1}{k}$?

2. F — функция, ограниченная на R . Будет ли ограниченной на R функция: а) F^2 ; б) $\frac{1}{F^2}$?
3. Решите неравенство $|2x^2 - 1| + |3 - x^2| \leq 1$.

Вариант 2

1. Является ли заданная функция ограниченной и если да, то в каких границах лежат ее значения, если:
а) $y(x) = 0,5x - 2$ при $-4 \leq x \leq -2$;
б) $x(a) = a^2 + 2a - 3$ при $-3 \leq a \leq 0$; в) $g(k) = \frac{k^4 + 1}{k}$?
2. F — функция, ограниченная на R . Будет ли ограниченной на R функция: а) F^3 ; б) $\frac{1}{F^3}$?
3. Решите неравенство $|10 - x^2| + |2x^2 - 5| \leq 1$.

Задание 1.10. Обратная функция

Вариант 1

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x)$ — функция, обратная для $f(x)$. Вычислите:
а) $g(2)$; б) $g(-a)$.
2. Найдите функцию, обратную для функции:
а) $y(x) = 2x - 3$; б) $x(y) = -y^2 + 2y$, где $y \in [1, 2]$;
в) $z(t) = \frac{t+1}{t-1}$.
3. Существует ли обратная для функции $y = \frac{2x}{1-x^2}$ при $x > 1$?
4. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на R и взаимно обратны. Будут ли взаимно обратными функции $f(-x)$ и $g(-x)$?

Вариант 2

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x)$ — функция, обратная для $f(x)$. Вычислите:
а) $g(-2)$; б) $g(a)$.

2. Найдите функцию, обратную для функции:

а) $y(x) = -5x + 1$; б) $x(y) = -y^2 - 2y$, где $y \in [-2, -1]$;

в) $z(t) = \frac{t-1}{t+1}$.

3. Существует ли обратная для функции $y = \frac{x^2}{1-x^3}$ при $x > 1$?

4. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на R и взаимно обратны. Будут ли взаимно обратными функции $-f(x)$ и $-g(x)$?

Задание 1.11. Периодичность функции

Вариант 1

1. $f(x)$ определена на R , нечетная, периодическая с главным периодом 6. При этом

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ -4x + 12, & \text{если } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

а) Нарисуйте график этой функции на $[-6, 6]$.

б) Вычислите $f(1987)$.

2. t_1 и t_2 — два периода функции f , заданной на R . Будет ли ее периодом $t_1 + t_2$?

3. $\sqrt{2}$ является главным периодом функции f . Будет ли $\sqrt{3}$ ее периодом?

4. f — периодическая функция. Будет ли периодической функция $\frac{1}{f}$?

5. Функция f определена на R , нигде не обращается в нуль, и при этом $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$. Докажите, что f является периодической функцией.

Вариант 2

1. $f(x)$ определена на R , четная, периодическая с главным периодом 6. При этом

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 4x - 8, & \text{если } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

а) Нарисуйте график этой функции на $[-6, 6]$.

б) Вычислите $f(1987)$.

2. t_1 и t_2 — два периода функции f , заданной на R . Будет ли ее периодом $t_1 - t_2$?

- $\sqrt{3}$ является главным периодом функции f . Будет ли $\sqrt{5}$ ее периодом?
- f — периодическая функция. Будет ли периодической функция $\sqrt{f}$?
- Функция f определена на R , нигде не обращается в нуль, и при этом $f(x-1) = -\frac{1}{f(x)}$. Докажите, что f является периодической функцией.

Задание 1.12. Преобразования графиков функций

Вариант 1

- Нарисуйте график функции:
 - $y = -2|1-x|+1$;
 - $y = |-x^2 + |x| - 1|$;
 - $y = \left| \frac{2x+3}{1-x} \right|$;
 - $y = \frac{x^4}{2|x|} - 1$.
- При каких a и b имеет решение уравнение

$$(a-x)^2 - b = -\sqrt{x-a}?$$

Вариант 2

- Нарисуйте график функции:
 - $y = -3|2-x|-1$;
 - $y = |x^2 - |x| + 1|$;
 - $y = \left| \frac{3x+2}{1-x} \right|$;
 - $y = -\frac{2x^4}{|x|} + 1$.
- При каких a и b имеет решение уравнение

$$(a-x)^2 + b = -\sqrt{x-a}?$$

Задание 1.13. Контрольное задание

Вариант 1

- В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 1.
 - Выразите его периметр как функцию от площади.
 - Нарисуйте график этой функции.
- Решите неравенство $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{-1} > (x^2 + 1)^{-1}$.
- Пусть $f(x) = x+1$: а) найдите такие функции $g(x)$ и $h(x)$, что $g(h(x)) = f(x)$; б) единственна ли такая пара функций? в) может ли при этом $g = h$?

Вариант 2

- В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 1.
а) Выразите его площадь как функцию от периметра.
б) Нарисуйте график этой функции.
- Решите неравенство $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{-1} < (x^2 + 1)^{-1}$.
- Пусть $f(x) = x - 1$: а) найдите такие функции $g(x)$ и $h(x)$, что $g(h(x)) = f(x)$; б) единственна ли такая пара функций? в) может ли при этом $g = h$?

Тема 2

ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ

Задание 2.1. Определение предела функции в точке

Вариант 1

- $f(x) = 2x + 1$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.
- $g(y) = y^2 + 2$. Докажите, что $\lim_{y \rightarrow 3} g(y) = 11$.
- $h(z) = \frac{1}{z}$. Докажите, что $\lim_{z \rightarrow 2} h(z) \neq 1$.

Вариант 2

- $f(x) = 0,5x - 2$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 1$.
- $g(y) = y^3 - 3$. Докажите, что $\lim_{y \rightarrow -2} g(y) = 1$.
- $h(z) = -\frac{1}{z}$. Докажите, что $\lim_{z \rightarrow -1} h(z) \neq 2$.

Задание 2.2. Вычисление предела функции в точке

Вариант 1

- Вычислите:
а) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \Delta x} - \sqrt{2}}{\Delta x}$; б) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt[3]{1 + t^2} - 1}$;
в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{-x^2 + 3x + 4}$; г) $\lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^5 + 1}{y^7 + 1}$.
- В равнобедренном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны 1. Пусть r — радиус вписанной в этот треугольник окружности, а R — радиус описанной около треуголь-

ника окружности. Вычислите $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{R}$, где h — высота, проведенная к основанию.

Вариант 2

1. Вычислите:

$$\text{а) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x}; \quad \text{б) } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt[3]{8 + t^2} - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 3}{-x^2 + 4x + 5}; \quad \text{г) } \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{10} - 1}{y^{12} - 1}.$$

2. В равнобедренном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны, $AC = 2$. Пусть r — радиус вписанной в этот треугольник окружности, а R — радиус описанной около треугольника окружности. Вычислите $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{R}$, где h — высота, проведенная к основанию.

Задание 2.3. Предел функции на бесконечности

Вариант 1

1. Вычислите:

$$\text{а) } \lim_{t \rightarrow +\infty} ((t+1)^{\frac{1}{3}} - (t-1)^{\frac{1}{3}}); \quad \text{б) } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y+1)^{50} (y+2)^{60}}{(2y+3)^{110}}.$$

2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$ на асимптоты.

3. Исходя из определения, докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{x^2} = -\infty$.

4. Приведите пример такой функции f , что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = 0$.

Вариант 2

1. Вычислите:

$$\text{а) } \lim_{t \rightarrow +\infty} ((t-1)^{\frac{1}{3}} - (t+1)^{\frac{1}{3}}); \quad \text{б) } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y-1)^{50} (y-2)^{60}}{(2y-1)^{110}}.$$

2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 2}$ на асимптоты.

3. Исходя из определения, докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{x^2} = +\infty$.

4. Приведите пример такой функции f , что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = 0$.

Задание 2.4. Контрольное задание

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\lim_{x \rightarrow a+1} \frac{x^2 - x - a}{x - 1}$; б) $\lim_{t \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2t} - 5}{\sqrt[3]{t} - 2}$; в) $\lim_{z \rightarrow \infty} (\sqrt{z^2 - 2} - z)$.

2. Нарисуйте график функции $y(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны 1. Из середины K основания проведены перпендикуляры KP и KT на боковые стороны треугольника. Вычислите предел отношения площадей треугольников KPT и ABC при условии, что BK стремится к нулю.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\lim_{x \rightarrow a-1} \frac{x^2 + x - a}{x + 1}$; б) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 + t} - \sqrt{3}}{\sqrt[3]{t} - 1}$; в) $\lim_{z \rightarrow \infty} (z - \sqrt{z^2 + 1})$.

2. Нарисуйте график функции $y(x) = \frac{-x^2 + 1}{2x}$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны 1. Из середины K основания проведены перпендикуляры KP и KT на боковые стороны треугольника. Вычислите предел отношения площадей треугольников KPT и ABC при условии, что BK стремится к 1.

Задание 2.5. Непрерывность функции

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции

$$f(x) = \begin{cases} kx + 2 & \text{при } x \geq 0, \\ x^2 + kx + k^2 + 1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

если известно, что она непрерывна.

2. Две функции f и g таковы, что $f \cdot g$ и $f - g$ непрерывны на R . Будет ли функция $f + g$ непрерывной на R ?

3. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 взяты точка K — середина стороны AD и точка M — середина стороны BC . Через точку K проводятся всевозможные прямые, имеющие общую точку с ломаной ABM . Пусть x — расстояние от такой прямой до A , а L — длина отрезка такой прямой, находящегося в данном квадрате. Найдите зависимость L от x и выясните, будет ли полученная функция непрерывной.
4. Является ли функция, заданная на замкнутом промежутке, непрерывной на этом промежутке, если ее областью значений является замкнутый промежуток?
5. Можно ли одной линией разделить сегмент круга на три равновеликие части? (Линия не проходит по границе сегмента.)

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции

$$f(x) = \begin{cases} |kx - 2| & \text{при } x \geq 0, \\ x^2 + kx + k^2 - 3 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

если известно, что она непрерывна.

2. Две функции f и g таковы, что $f \cdot g$ и $f + g$ непрерывны на R . Будет ли функция $f - g$ непрерывной на R ?
3. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 взяты точка K — середина стороны AD и точка M — середина стороны BC . Через точку K проводятся всевозможные прямые, имеющие общую точку с ломаной DCM . Пусть x — расстояние от такой прямой до A , а L — длина отрезка такой прямой, находящегося в данном квадрате. Найдите зависимость L от x и выясните, будет ли полученная функция непрерывной.
4. Является ли функция, заданная на замкнутом промежутке, непрерывной на этом промежутке, если она имеет на этом промежутке наибольшее и наименьшее значения?
5. Можно ли одной линией разделить равнобокую трапецию на три равновеликие части? (Линия не проходит по границе трапеции.)

Задание 2.6. Определение производной, ее геометрический и механический смысл, использование для приближенных вычислений

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \sqrt{x+2}$; б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{если } x > 0, \\ -x^3, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$

2. $h(x) = x^2 + x + 1$. Напишите уравнения касательной и нормали к графику этой функции в точке (1, 3).
3. Вычислите приближенное значение $\sqrt{100,5}$.
4. а) Площадь круга в некоторый момент времени растет со скоростью 1. Чему равна в этот момент длина его окружности?
б) Решите задачу в общем виде.

Вариант 2

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \sqrt{x-2}$; б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{если } x > 0, \\ x^3, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$

2. $h(x) = x^2 - x + 1$. Напишите уравнения касательной и нормали к графику этой функции в точке (1, 1).
3. Вычислите приближенное значение $\sqrt{99,5}$.
4. а) Площадь квадрата в некоторый момент времени растет со скоростью 1. Чему равен в этот момент его периметр?
б) Решите задачу в общем виде.

Задание 2.7. Теоремы дифференцирования

Вариант 1

1. $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$.

а) Найдите $f'(x)$.

б) В какой точке нормаль к графику этой функции перпендикулярна оси x ?

в) Какой по виду угол образует при $x > 0$ касательная к графику этой функции с осью x ?

2. Зависимость расстояния x от времени t движущейся точки такова: $x(t) = \frac{2t+1}{t+1}$. Докажите, что ее скорость не превосходит 1.
3. Найдите функцию $H(x)$, такую, что $H'(x) = x^2 + 1$, причем $H(0) = -1$.

Вариант 2

1. $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$.
 - а) Найдите $f'(x)$.
 - б) В какой точке нормаль к графику этой функции перпендикулярна оси x ?
 - в) Какой по виду угол образует при $x < 0$ касательная к графику этой функции с осью x ?
2. Зависимость расстояния x от времени t движущейся точки такова: $x(t) = \frac{3t+1}{t+2}$. Докажите, что ее скорость не превосходит 2.
3. Найдите функцию $H(x)$, такую, что $H'(x) = -x^2 + 1$, причем $H(0) = 1$.

Задание 2.8. Дифференцирование операций и сложной функции

Вариант 1

1. $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$, $g(x) = f(f(x))$. Найдите $g'(x)$.
2. $g(y) = \frac{y^2 + y + 1}{y^2 + y}$. При каких значениях y производная функции g отрицательна?
3. Две стороны треугольника равны 1, а третья растет со скоростью v . С какой скоростью растет радиус окружности, описанной около этого треугольника, в тот момент, когда этот треугольник является равносторонним?
4. Функции f и g таковы, что $f + g$ и $f \cdot g$ дифференцируемы на R . Будет ли дифференцируема на R функция $f - g$?
5. $H(t) = t \cdot (t+1) \cdot (t+2) \dots (t+100)$. Вычислите $H'(0)$.

Вариант 2

1. $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$, $g(x) = f(f(x))$. Найдите $g'(x)$.
2. $g(y) = \frac{y^2 - y + 1}{y^2 - y}$. При каких значениях y производная функции g отрицательна?
3. Две стороны треугольника равны 1, а третья растет со скоростью v . С какой скоростью растет радиус окружности, описанной около этого треугольника, в тот момент, когда этот треугольник является прямоугольным?
4. Функции f и g таковы, что $f - g$ и $f \cdot g$ дифференцируемы на R . Будет ли дифференцируема на R функция $f + g$?
5. $H(t) = t \cdot (t - 1) \cdot (t - 2) \dots (t - 100)$. Вычислите $H'(0)$.

Задание 2.9. Исследование функции на монотонность

Вариант 1

1. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \frac{3+x^2}{x}$.
2. При каких значениях a функция $x(t) = at^3 + at$ возрастает на R ?
3. Докажите, что при $x \geq 1$ верно неравенство $2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$.

Вариант 2

1. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$.
2. При каких значениях a функция $x(t) = at^5 + at$ возрастает на R ?
3. Докажите, что при $x \geq 1$ верно неравенство $3\sqrt[3]{x^2} \geq 1 - \frac{2}{x}$.

**Задание 2.10. Исследование функции на экстремум,
наибольшее и наименьшее значения**

Вариант 1

1. Найдите экстремальные, наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x - 12$;

б) $g(y) = y^5 - y - 1$ при $1 \leq y \leq 4$;

в) $x(t) = \frac{t+1}{t-1}$ при $0 \leq t \leq 2$.

2. Из всех равнобедренных треугольников с периметром 2 найдите тот, у которого площадь наибольшая.

3. Имеет ли уравнение $x^3 - x = -1$ положительный корень?

Вариант 2

1. Найдите экстремальные, наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 7$;

б) $g(y) = y^5 - 2y + 1$ при $1 \leq y \leq 3$;

в) $x(t) = \frac{t-1}{t+1}$ при $-2 \leq t \leq 0$.

2. Из всех равнобедренных треугольников с площадью 1 найдите тот, у которого периметр наименьший.

3. Имеет ли уравнение $x^3 - x = 1$ отрицательный корень?

Задание 2.11. Построение графиков функций

Вариант 1

Нарисуйте график функции.

1. $y = x - \sqrt{a(1-x^2)}$ при $a > 0$. 2. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

Вариант 2

Нарисуйте график функции.

1. $y = x + \sqrt{a(1-x^2)}$ при $a > 0$. 2. $y = \frac{x^4}{1-x^3}$.

Задание 2.12. Текстовые задачи на экстремум

Вариант 1

1. В равностороннем треугольнике ABC расположен параллелограмм $AMHP$ так, что M лежит на AB , H лежит на BC , P лежит на AC . Будет ли ромбом тот из параллелограммов, который имеет наибольшую площадь?
2. На прямолинейном участке железной дороги расположены станция и на некотором расстоянии от нее город. Песчаный карьер находится на расстоянии 3 км от железной дороги и станции. Требуется проложить дорогу от карьера до железнодорожного пути так, чтобы стоимость перевозок от карьера до города была наименьшей. Перевозка по шоссе обходится в 2 раза дороже, чем перевозка на то же расстояние по железной дороге. Как проложить шоссе, чтобы стоимость перевозки была наименьшей?

Вариант 2

1. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC расположен параллелограмм $AMHP$ так, что M лежит на AB , H лежит на BC , P лежит на гипотенузе AC . Будет ли ромбом тот из параллелограммов, который имеет наибольшую площадь?
2. На прямолинейном участке берега озера расположены пристань и на некотором расстоянии от нее деревня. Лодочник находится на расстоянии 3 км от берега и пристани. Причалив к берегу, он бежит в деревню. Скорость его на суше в 2 раза больше скорости на воде. Куда ему причалить, чтобы добраться до деревни за наименьшее время?

Задание 2.13. Контрольное задание

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $y = \frac{x^4}{(x-1)^3}$.
2. Докажите, что расстояние между графиком функции $y = x^4$ и прямой $x - y - 1 = 0$ меньше 1.

3. $T(x) = x^2 - ax + a$. Пусть $H(a)$ — сумма кубов корней $T(x)$. Какова область значений $H(a)$?

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $y = x^4(x+1)^{-3}$.
2. Докажите, что расстояние между графиком функции $y = x^4$ и прямой $x + y + 1 = 0$ меньше 1.
3. $T(x) = x^2 + ax + a$. Пусть $H(a)$ — сумма кубов корней $T(x)$. Какова область значений $H(a)$?

Тема 3

ИНТЕГРАЛ И ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задание 3.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Вариант 1

1. $F''(t) = t^2 - 3t$, $F(0) = 1$, $F(1) = \frac{5}{6}$, $F(-1) = 1\frac{1}{3}$. Найдите $F(2)$.
2. $f(x) = |x|$. Нарисуйте график той первообразной для функции $f(x)$, которая имеет положительный корень.
3. $g(x) = x^{-2}$. Точка A имеет координаты $(1, 0)$. а) Нарисуйте график той первообразной для функции g , который проходит через точку A . б) Какой угол с осью x образует нормаль к графику функции G в точке A ?
4. График функции состоит из двух полуокружностей. Радиус каждой равен 1. Центр первой из них находится в точке $(1, 0)$, центр второй — в точке $(3, 0)$. Первая полуокружность находится над осью x , а вторая — под этой осью. Нарисуйте график первообразной для этой функции.
5. Точка (x, y) движется в первой четверти системы координат. Обе ее координаты зависят от времени, а ее траектория проходит через точку $A(1, 2)$. По какой линии она движется, если при этом выполняется условие $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$?

Вариант 2

1. $F''(t) = t^2 + 3t$, $F(0) = 1$, $F(1) = \frac{3}{4}$, $F(-1) = 1\frac{7}{12}$. Найдите $F(2)$.

2. $f(x) = |x|$. Нарисуйте график той первообразной для функции $f(x)$, которая имеет отрицательный корень.
3. $g(x) = x^{-2}$. Точка A имеет координаты $(-1, 0)$. а) Нарисуйте график той первообразной для функции g , который проходит через точку A . б) Какой угол с осью x образует нормаль к графику функции G в точке A ?
4. График функции состоит из двух полуокружностей. Радиус каждой равен 1. Центр первой из них находится в точке $(1, 0)$, центр второй — в точке $(3, 0)$. Первая полуокружность находится под осью x , а вторая — над этой осью. Нарисуйте график первообразной для этой функции.
5. Точка (x, y) движется в первой четверти системы координат. Обе ее координаты зависят от времени, а ее траектория проходит через точку $A(1, 2)$. По какой линии она движется, если при этом выполняется условие $\frac{y}{x} = -\frac{y'}{x'}$?

Задание 3.2. Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки

Вариант 1

Найдите неопределенный интеграл.

1. $\int (1 - 2y)^{15} dy$.
2. $\int \frac{z^2 dz}{(1 + z^3)^{20}}$.
3. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$.
4. $\int (x + 1)(x + 2)^{10} dx$.
5. $\int \frac{\sqrt{2 - y^2}}{y^4} dy, y > 0$.

Вариант 2

Найдите неопределенный интеграл.

1. $\int (1 - 0,5y)^{15} dy$.
2. $\int \frac{z^3 dz}{(1 + z^4)^{20}}$.
3. $\int \frac{\sqrt{1 - \sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$.
4. $\int (x + 1)^{10} (x + 2) dx$.
5. $\int \frac{\sqrt{3 - y^2}}{y^4} dy, y > 0$.

Задание 3.3. Нахождение неопределенного интеграла с использованием алгебраических преобразований

Вариант 1

1. Найдите неопределенный интеграл:

а) $\int \frac{16-x}{2\sqrt{x}+8} dx;$

б) $\int \frac{x^3+x-2}{x-1} dx;$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}};$

г) $\int \frac{t^2-t}{(2t-1)^4} dt.$

2. Нарисуйте график той первообразной для функции $f(x)$, который проходит через точку $(5, 1)$, если

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}.$$

Вариант 2

1. Найдите неопределенный интеграл:

а) $\int \frac{x-25}{3\sqrt{x}+15} dx;$

б) $\int \frac{x^3-2x+1}{x-1} dx;$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}};$

г) $\int \frac{t^2+t}{(2t+1)^4} dt.$

2. Нарисуйте график той первообразной для функции $f(x)$, который проходит через точку $(1, 25; -1)$, если

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{1-\sqrt{x-1}}.$$

Задание 3.4. Интегральные кривые

Вариант 1

Нарисуйте интегральную кривую, соответствующую данному уравнению.

1. $y' = \frac{|xy|}{xy}.$

2. $y \cdot y' = x$ при условии, что $y(0) = 0.$

3. $y' = \frac{y}{1-x}, x > 1.$

Вариант 2

Нарисуйте интегральную кривую, соответствующую данному уравнению.

1. $y' = \frac{xy}{|xy|}$.

2. $y \cdot y' = -x$ при условии, что $y(0) = 1$.

3. $y' = \frac{y}{1-x}$, $x < 1$.

Задание 3.5. Вычисление определенного интеграла

Вариант 1

1. Найдите определенный интеграл:

а) $\int_0^2 \frac{x dx}{(1-x^2)^2}$;

б) $\int_{-1}^1 \frac{y^3 + y^2 + 1}{y^2 + 1} dy$;

в) $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx$ при условии $a < b$.

2. При каких значениях a верно равенство $\int_a^2 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}$?

3. Найдите такую функцию f , что для каждого значения a верно равенство $\int_0^a f(x) dx = a^2 + a$.

Вариант 2

1. Найдите определенный интеграл:

а) $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^2}$;

б) $\int_{-1}^1 \frac{y^3 - y^2 - 1}{y^2 + 1} dy$;

в) $\int_a^b \frac{x}{|x|} dx$ при условии $a < b$.

2. При каких значениях a верно равенство $\int_a^2 \sqrt{t} dt = \frac{4}{3}$?

3. Найдите такую функцию f , что для каждого значения a верно равенство $\int_0^a f(x) dx = a^2 - a$.

**Задание 3.6. Вычисление определенного интеграла
с помощью замены переменной**

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\int_0^1 x(1-x^2)^{10} dx$; б) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$.

2. а) Сравните между собой $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$ и $\int_0^1 x^3(1-x)^2 dx$.

б) Попытайтесь обобщить полученный результат.

3. а) Вычислите: $\frac{\int_0^{100} f(t) dt}{\int_0^1 f(100t) dt}$.

б) Полученный результат обобщите.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\int_0^1 x(x^2-1)^{10} dx$; б) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

2. а) Сравните между собой $\int_0^1 x^3(1-x)^4 dx$ и $\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx$.

б) Попытайтесь обобщить полученный результат.

3. а) Вычислите: $\frac{\int_0^{101} f(t) dt}{\int_0^1 f(101t) dt}$.

б) Полученный результат обобщите.

Задание 3.7. Интеграл с переменным верхним пределом

Вариант 1

1. $f(x) = \int_0^x (1-t^2) dt$. Найдите $\int f(x) dx$.

2. Пусть $F'(x) = \int_0^x (1 - z^3) dz$. При каких x достигает экстремальных значений функция $F(x)$, если $F(0) = -1$?

3. Найдите $\left(\int_1^{x^2} \frac{dt}{t^2 + t + 1} \right)'$.

4. Найдите функцию $f(x)$, отличную от нуля и такую, что $\int_0^x f(a) da = f^2(x)$.

5. Нарисуйте график функции $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^6}$.

Вариант 2

1. $f(x) = \int_0^x (t^2 - 1) dt$. Найдите $\int f(x) dx$.

2. Пусть $F'(x) = \int_0^x (1 - z^3) dz$. При каких x достигает экстремальных значений функция $F(x)$, если $F(0) = 1$?

3. Найдите $\left(\int_1^{2x} \frac{dt}{t^2 - t + 1} \right)'$.

4. Найдите функцию $f(x)$, отличную от нуля и такую, что $\int_0^x f(a) da = -f^2(x)$.

5. Нарисуйте график функции $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^4}$.

Задание 3.8. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

Вариант 1

1. Параболу $y = x^2$ отразили относительно прямой $x = 3$. Сделайте рисунок и найдите наибольшую из площадей, ограниченных графиками обеих кривых и осями координат.

2. Вычислите меньшую из двух площадей фигур, ограниченных прямой $x = 0$, графиком $y = x^4$ и нормалью к этому графику, проведенной через точку с абсциссой $x = -1$.
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - x - 2$ и $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Вариант 2

1. Параболу $y = x^2$ отразили относительно прямой $x = -3$. Сделайте рисунок и найдите наибольшую из площадей, ограниченных графиками обеих кривых и осями координат.
2. Вычислите меньшую из двух площадей фигур, ограниченных прямой $x = 0$, графиком $y = x^6$ и нормалью к этому графику, проведенной через точку с абсциссой $x = 1$.
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + x - 2$ и $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Задание 3.9. Вычисление определенного интеграла с помощью площади

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$;

б) $\int_0^3 |1 - z| dz$.

2. Сравните, не вычисляя, $\int_0^1 (x^3 - x^5) dx$ и $\int_0^1 (\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}) dx$.

3. Пусть $g(x)$ — непрерывная и положительная функция на R . При этом для всякого x выполняется равенство $g(x+1) = g(x)$. Сравните $\int_a^{a+1} g(x) dx$ и $\int_0^1 g(x) dx$.

4. $f(y) = ky^2 - y + k$. Для каких значений k при любом a и любом b , большем, чем a , выполняется неравенство

$$\int_a^b f(y) dy > 0?$$

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$;

б) $\int_0^3 |2 - z| dz$.

2. Сравните, не вычисляя, $\int_0^1 (x^2 - x^4) dx$ и $\int_0^1 (\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}) dx$.

3. Пусть $g(x)$ — непрерывная и положительная функция на R . При этом для всякого x выполняется равенство $g(x-1) = g(x)$. Сравните $\int_a^{a+1} g(x) dx$ и $\int_0^1 g(x) dx$.

4. $f(y) = ky^2 + y + k$. Для каких значений k при любом a и любом b , большем, чем a , выполняется неравенство

$$\int_a^b f(y) dy < 0?$$

Задание 3.10. Нахождение объема с помощью интеграла

Вариант 1

1. Найдите объем фигуры, образованной вращением части плоскости, ограниченной графиком $y = x^2 - 1$ и прямой $y = 0$, вокруг: а) оси X ; б) оси Y ; в) прямой $y = -1$.
2. Основание тела — круг радиуса 1. Любое сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной к одному и тому же диаметру этого круга и проходящей через внутреннюю точку этого диаметра, является равносторонним треугольником. Вычислите объем этого тела.
3. Может ли фигура, образованная вращением вокруг оси X графика некоторой функции, ограниченная плоскостями $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), иметь объем, меньший, чем π при любом значении b ?

Вариант 2

1. Найдите объем фигуры, образованной вращением части плоскости, ограниченной графиком $y = -x^2 + 1$ и прямой $y = 0$, вокруг: а) оси X ; б) оси Y ; в) прямой $y = 1$.

2. Основание тела — круг радиуса 1. Любое сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной к одному и тому же диаметру этого круга и проходящей через внутреннюю точку этого диаметра, является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой в основании. Вычислите объем этого тела.
3. Может ли фигура, образованная вращением вокруг оси X графика некоторой функции, ограниченная плоскостями $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), иметь объем, меньший, чем 1 при любом значении b ?

Задание 3.11. Длина кривой

Вариант 1

1. $y = \left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$. Вычислите длину кривой на промежутке $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.
2. Сравните длину кривой $y = x^3$ на промежутках $[0, 1]$ и $[1, 2]$.
3. Найдите дифференцируемую на R функцию f , такую, что для любого $x \geq 0$ длина графика f на промежутке $[0, x]$ равна $2f(x)$.

Вариант 2

1. $y = \left(\frac{3-4x}{6}\right)\sqrt{x}$. Вычислите длину кривой на промежутке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.
2. Сравните длину кривой $y = x^4$ на промежутках $[0, 1]$ и $[1, 2]$.
3. Найдите дифференцируемую на R функцию f , такую, что для любого $x \geq 0$ длина графика f на промежутке $[0, x]$ равна $-2f(x)$.

Задание 3.12. Оценка определенных интегралов

Вариант 1

1. Докажите, что $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x+1}} < 1$.
2. Оцените с обеих сторон $\int_2^3 \frac{x dx}{1+x}$.

3. Пусть на промежутке $[0, 1]$ непрерывная функция принимает значения от 1 до 2.

а) Оцените сверху и снизу $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$.

б) Докажите, что $2 \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} + \int_0^1 f(x) dx \leq 3$.

4. а) Приведите пример такой функции f , что выполняется неравенство $f(0) < \int_0^1 f(x) dx < \frac{f(0) + f(1)}{2}$.

б) Попытайтесь обобщить полученный результат.

Вариант 2

1. Докажите, что $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}} < 1$.

2. Оцените с обеих сторон $\int_3^7 \frac{x dx}{1+x}$.

3. Пусть на промежутке $[-1, 0]$ непрерывная функция принимает значения от 1 до 2.

а) Оцените сверху и снизу $\int_{-1}^0 \frac{dx}{f(x)}$.

б) Докажите, что $2 \int_{-1}^0 \frac{dx}{f(x)} + \int_{-1}^0 f(x) dx \leq 3$.

4. а) Приведите пример такой функции f , что выполняется неравенство $\frac{f(0) + f(1)}{2} < \int_0^1 f(x) dx < f(0)$.

б) Попытайтесь обобщить полученный результат.

Задание 3.13. Приближенное вычисление определенных интегралов

Вариант 1

Дан интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$.

1. Оцените его с двух сторон.

2. Вычислите его (с недостатком) по способу прямоугольников до третьего знака после запятой, взяв $n = 4$. Оцените погрешность.
3. Вычислите его по способу трапеций до третьего знака после запятой, взяв $n = 3$.
4. Вычислите его по формуле Симпсона до третьего знака после запятой, взяв $n = 3$.

Вариант 2

Дан интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$.

1. Оцените его с двух сторон.
2. Вычислите его (с избытком) по способу прямоугольников до третьего знака после запятой, взяв $n = 4$. Оцените погрешность.
3. Вычислите его по способу трапеций до третьего знака после запятой, взяв $n = 3$.
4. Вычислите его по формуле Симпсона до третьего знака после запятой, взяв $n = 3$.

Задание 3.14. Интегральные суммы

Вариант 1

1. а) Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$.
б) Попробуйте обобщить полученный результат.
2. Оцените с точностью до 0,1 сумму

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10}}.$$

Вариант 2

1. а) Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5}$.
б) Попробуйте обобщить полученный результат.
2. Оцените с точностью до 0,1 сумму

$$1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{10}}.$$

Задание 3.15. Несобственный интеграл

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 8)^3}}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x \sqrt[5]{x}}$.

2. При каких значениях a $\int_{-a}^0 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^2} = 0$?

3. $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}$.

а) Нарисуйте график этой функции.

б) Вычислите площадь криволинейной трапеции, заданной этим графиком на промежутке $[0, 1]$.

в) Вычислите объем фигуры, полученной в результате вращения графика этой функции вокруг оси X на промежутке $[0, 1]$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\int_3^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 8)^3}}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x \sqrt[5]{x}}$.

2. При каких значениях a $\int_{-a}^0 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^4} = 0$?

3. $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[5]{t^4}}$.

а) Нарисуйте график этой функции.

б) Вычислите площадь криволинейной трапеции, заданной этим графиком на промежутке $[0, 1]$.

в) Вычислите объем фигуры, полученной в результате вращения графика этой функции вокруг оси X на промежутке $[0, 1]$.

Задание 3.16. Применение интеграла

Вариант 1

1. На графике функции $y = f(x)$, расположенном в первой четверти, взята произвольная точка A . Из нее проведен перпендикуляр AB к оси X и через нее проведена нормаль к графи-

ку, которая пересекает ось X в точке N . При этом оказалось, что $NB = OB^3$ (O — начало координат). График функции проходит через точку $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Найдите эту функцию.

- Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент времени она находилась на расстоянии 2 м от начала отсчета и имела скорость 1 м/с. Чему равен пройденный ею путь за 8 с после начала движения и какова ее скорость в конце этого пути?

Вариант 2

- На графике функции $y = f(x)$, расположенном в четвертой четверти, взята произвольная точка A . Из нее проведен перпендикуляр AB к оси X и через нее проведена нормаль к графику, которая пересекает ось x в точке N . При этом оказалось, что $NB = OB^3$ (O — начало координат). График функции проходит через точку $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Найдите эту функцию.
- Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент времени она находилась на расстоянии 4 м от начала отсчета и имела скорость 1 м/с. Чему равен пройденный ею путь за 6 с после начала движения и какова ее скорость в конце этого пути?

Задание 3.17. Контрольное задание

Вариант 1

- Вычислите наименьшую площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\sqrt{x}$, $y = -x^2$ и $y = x - 6$.
- Сравните интегралы от функций

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \text{ и } g(x) = \sqrt[4]{x^2 - x}.$$

Сравнение проведите для двух случаев: а) на промежутке $[1, a]$ при $a > 1$; б) на промежутке $[1, +\infty)$.

- Фигура ограничена линиями:

$$y = \frac{x}{6} + x^{-2}, y = 0, x = a, x = 2a (a > 0).$$

При каких значениях a площадь этой фигуры экстремальна?

4. Чему равна сумма $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{99}$?

5. а) Вычислите $\int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)} dx$.

б) Обобщите полученный результат.

Вариант 2

1. Вычислите наименьшую площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\sqrt{x}$, $y = x^2$ и $y = x + 6$.

2. Сравните интегралы от функций

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \text{ и } g(x) = \sqrt[4]{x^2 + x}.$$

Сравнение проведите для двух случаев: а) на промежутке $[1, a]$ при $a > 1$; б) на промежутке $[1, +\infty)$.

3. Фигура ограничена линиями:

$$y = -\frac{x}{6} + x^{-2}, y = 0, x = a, x = 2a \ (a < 0).$$

При каких значениях a площадь этой фигуры экстремальна?

4. Чему равна сумма $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{99}$?

5. а) Вычислите $\int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)} dx$.

б) Обобщите полученный результат.

Тема 4

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Задание 4.1. Значения тригонометрических функций

Вариант 1

1. Укажите такое число x , что верно неравенство $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 4x \cdot \sec 5x \cdot \operatorname{cosec} 6x < 0$.

2. Множество A состоит из всех чисел вида $\frac{\pi}{3}k$, а множество B состоит из всех чисел вида $\frac{\pi}{3} + \pi k$ (k — целое число). Найдите значения всех тригонометрических функций для чисел, входящих в оба множества.

3. $a_n = (\sin x)^{2^n}$.

а) При каких значениях x последовательность (a_n) не является геометрической прогрессией?

б) При каких значениях x последовательность (a_n) является бесконечной убывающей геометрической прогрессией?

в) Вычислите сумму этой прогрессии при $x = -\frac{\pi}{6}$.

4. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$ на промежутке $[2\pi, 4\pi]$.

5. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} \delta = \sqrt{3}$. Числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежат в промежутке $[0, 2\pi]$. Вычислите наибольшее и наименьшее значения суммы $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Вариант 2

1. Укажите такое число x , что верно неравенство $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{cosec} 5x \cdot \sec 6x < 0$.

2. Множество A состоит из всех чисел вида $\frac{\pi}{4}k$, а множество B состоит из всех чисел вида $\frac{\pi}{4} + \pi k$ (k — целое число). Найдите значения всех тригонометрических функций для чисел, входящих в оба множества.

3. $a_n = (\cos x)^{2^n}$.

а) При каких значениях x последовательность (a_n) не является геометрической прогрессией?

б) При каких значениях x последовательность a_n является бесконечной убывающей геометрической прогрессией?

в) Вычислите сумму этой прогрессии при $x = -\frac{\pi}{6}$.

4. Найдите корень уравнения $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 0$ на промежутке $[2\pi, 4\pi]$.

5. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg} \gamma = -\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежат в промежутке $[0, 2\pi]$. Вычислите наибольшее и наименьшее значения суммы $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Задание 4.2. Общие свойства тригонометрических функций

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $f(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x - 1} \right)^{0,5}$.

2. Решите уравнение $2\sin^4 x + \cos x + 1 = 0$.

3. Исследуйте на четность и нечетность функцию

$$x(t) = \frac{\cos t}{a \sin t - 1}.$$

4. Исследуйте на периодичность функцию:

а) $y = \sin \sqrt{|x|}$; б) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi x$.

5. Нарисуйте в системе координат множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y - |y| = y \cdot \operatorname{tg} x$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $f(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x - 1} \right)^{0.5}$

2. Решите уравнение $2 \cos^4 x + \sin x + 1 = 0$.

3. Исследуйте на четность и нечетность функцию

$$x(t) = \frac{\sin t}{a \sin t - 1}.$$

4. Исследуйте на периодичность функцию:

а) $y = \cos \sqrt{|x|}$; б) $y = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \pi x$.

5. Нарисуйте в системе координат множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y + |y| = y \cdot \operatorname{ctg} x$.

Задание 4.3. Основные тригонометрические тождества

Вариант 1

1. Представьте в виде степени произведения двух тригонометрических функций выражение

$$\operatorname{cosec}^3 x - 3 \operatorname{cosec} x + 3 \sin x - \sin^3 x.$$

2. Упростите выражение $\sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 a)(\operatorname{ctg}^2 a - 1)}$ и вычислите его значение при $a = \frac{\pi}{6}$.

3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = \sec x$ на промежутке $[0, \pi]$.

4. Пусть $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2.5$. Вычислите значение выражения
$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

5. Пусть $p = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $q = \frac{2t}{1+t^2}$. Может ли значение выражения $\frac{1-p^2}{1-q^2}$ быть больше, чем 3?

Вариант 2

- Представьте в виде степени произведения двух тригонометрических функций выражение $\sec^3 x - 3\sec x + 3\cos x - \cos^3 x$.
- Упростите выражение $\sqrt{(1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$ и вычислите его значение при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
- Решите уравнение $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x$ на промежутке $[-0,5\pi; 0,5\pi]$.
- Пусть $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3\frac{1}{3}$. Вычислите значение выражения $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.
- Пусть $p = \frac{-1+t^2}{1+t^2}$, $q = \frac{-2t}{1+t^2}$. Может ли значение выражения $\frac{1-q^2}{1-p^2}$ быть больше, чем 3?

Задание 4.4. Нахождение значений тригонометрических функций по значению одной из них

Вариант 1

- Пусть число x удовлетворяет двум условиям: $\operatorname{tg} x = 10$ и $\pi < x < 1,5\pi$. Расположите в порядке возрастания значения всех тригонометрических функций при этом x .
- $\operatorname{cosec} t = a$. Сравните $\operatorname{tg} t$ с числом 2 при: а) $a = 1,1$; б) $a = 1,2$.
- Дано неравенство $\cos^2 z + \operatorname{tg}^2 z + \operatorname{ctg}^2 z + \sec^2 z \geq 4$.
а) Проверьте его истинность при $z = \frac{2\pi}{3}$.
б) Установите, при каких z оно верно.
- $\operatorname{ctg} y = 2$. Найдите значение выражения $\frac{5\sin^2 y - 4\sin y \cos y + 3}{-4\sin^2 y + 3\sin y \cos y - 5\cos^2 y}$.

Вариант 2

1. Пусть число x удовлетворяет двум условиям: $\operatorname{ctg} x = 10$ и $\pi < x < 1,5\pi$. Расположите в порядке возрастания значения всех тригонометрических функций при этом x .
2. $\sec t = a$. Сравните $\operatorname{ctg} t$ с числом 2 при: а) $a = 1,1$; б) $a = 1,2$.
3. Дано неравенство $\sin^2 z + \operatorname{tg}^2 z + \operatorname{ctg}^2 z + \operatorname{cosec}^2 z \geq 4$.
а) Проверьте его истинность при $z = \frac{5\pi}{6}$.
б) Установите, при каких z оно верно.
4. $\operatorname{tg} y = 2$. Найдите значение выражения
$$\frac{-3\sin^2 y + 5\sin y \cos y + 4}{4\sin^2 y - 5\sin y \cos y - 3\cos^2 y}.$$

Задание 4.5. Формулы приведения

Вариант 1

1. При каких натуральных значениях k для любого x верно равенство $\sin x + \sin(x + \pi) + \dots + \sin(x + k\pi) = 0$?
2. При каких значениях a уравнение
$$\operatorname{tg}(30^\circ - x) - \operatorname{tg}(120^\circ - x) = a$$
не имеет решения?
3. Нарисуйте график функции
$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi - x)\sin(1,5\pi - x)}{\cos(\pi + x)\operatorname{ctg}(1,5\pi - x)} - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sec(x - 5\pi).$$
4. Сравните $\sin(\cos 1)$ и $\cos(\sin 1)$.
5. Что больше: $\operatorname{cosec}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - \sec\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ или $\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$?

Вариант 2

1. При каких натуральных значениях k для любого x верно равенство $\cos x + \cos(x + \pi) + \dots + \cos(x + k\pi) = 0$?
2. При каких значениях a уравнение
$$\operatorname{ctg}(60^\circ - x) - \operatorname{ctg}(150^\circ - x) = a$$
не имеет решения?
3. Нарисуйте график функции
$$f(x) = \frac{\operatorname{ctg}(\pi - x)\cos(1,5\pi - x)}{\sin(\pi + x)\operatorname{tg}(1,5\pi - x)} + \sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\operatorname{cosec}(x - 5\pi).$$

4. Сравните $\sin(\sin 1)$ и $\cos(\cos 1)$.

5. Что больше: $-\operatorname{cosec}(-\frac{5\pi}{4}) - \sec(-\frac{4\pi}{3})$ или $\operatorname{tg}(\frac{4\pi}{3}) + \operatorname{ctg}^2(-\frac{5\pi}{6})$?

Задание 4.6. Контрольное задание

Вариант 1

1. $\sin x = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}}$, $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x < 0$. Найдите остальные

тригонометрические функции и установите, при каких значениях a они существуют.

2. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}} - \sqrt{\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}}$ при $-3 < t < 2$.

3. Нарисуйте в системе координат множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\sin^6 x + \cos^7 y \geq 2$.

4. Пусть $x = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, $y = \sin \alpha + \cos \alpha$, $z = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$. Выразите x через y и z .

5. $f(x) = (\cos x)^{-4} - \operatorname{tg}^2 x$. Найдите область значений $f(x)$.

6. Вычислите сумму $\cos 0,1\pi + \cos 0,2\pi + \dots + \cos 0,9\pi$.

7. Решите уравнение $\sqrt{\sin(1-x)} = \sqrt{\cos 2x}$ на промежутке $[0, 1]$.

Вариант 2

1. $\cos x = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}}$, $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x < 0$. Найдите остальные триго-

нометрические функции и установите, при каких значениях a они существуют.

2. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} - \sqrt{\frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}}$ при $-3 < t < 2$.

3. Нарисуйте в системе координат множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\cos^6 x + \sin^7 y \geq 2$.

4. Пусть $x = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, $y = \sin \alpha - \cos \alpha$, $z = \sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha$. Выразите x через y и z .

5. $f(x) = (\sin x)^{-4} - \operatorname{ctg}^2 x$. Найдите область значений $f(x)$.

6. Вычислите сумму

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,1\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,2\pi\right) + \dots + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,9\pi\right).$$

7. Решите уравнение $\sqrt{\cos(1-x)} = \sqrt{\sin 2x}$ на промежутке $[-0,5, 0,5]$.

Тема 5

НАЧАЛА АНАЛИЗА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задание 5.1. Вычисление пределов

Вариант 1

Вычислите предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\sin x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{3} + 2x) - 2\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{3} + x) - \sqrt{3}}{x^2}$.

Вариант 2

Вычислите предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 3x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin ax}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(\frac{2\pi}{3} + 2x) - 2\operatorname{ctg}(\frac{2\pi}{3} + x) - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{x^2}$.

Задание 5.2. Вычисление пределов

Вариант 1

Вычислите предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x}{\arcsin x} \quad (n \in \mathbb{N})$.
2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin ax}{\sin x} \quad (a \in \mathbb{N})$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}$.
5. $\lim_{n \rightarrow -\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) \quad (n \in \mathbb{N})$.

Вариант 2

Вычислите предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx}{\arcsin x} \quad (n \in \mathbb{N}).$

2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin ax} \quad (a \in \mathbb{N}).$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} (1+x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}.$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 - 1}) \quad (n \in \mathbb{N}).$

Задание 5.3. Непрерывность тригонометрических функций

Вариант 1

1. Можно ли доопределить до непрерывной в точке 0 функцию $f(x)$:

а) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x};$

б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}?$

2. Укажите точки разрыва функции $f(x)$ и доопределите функцию в этих точках до непрерывной, если

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}.$$

3. Имеет ли уравнение $3\sin^3 x + 5\sin x - 1 = 0$ решение при $x \in (0, 0,5\pi)$? Сколько?

4. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \sin^2 x + a \sin x + 1.$$

5. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sin \sin \dots \sin 1$ (n синусов).

Вариант 2

1. Можно ли доопределить до непрерывной в точке 0 функцию $f(x)$:

а) $f(x) = \frac{\sin |x|}{x};$

б) $f(x) = \frac{x^3}{\sin x - \operatorname{tg} x}?$

2. Укажите точки разрыва функции $f(x)$ и доопределите функцию в этих точках до непрерывной, если

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}.$$

3. Имеет ли уравнение $3 \cos^3 x + 5 \cos x - 1 = 0$ решение при $x \in (0, 0,5\pi)$? Сколько?
4. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \cos^2 x + a \cos x + 1.$$
5. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sin \sin \dots \sin 2$ (n синусов).

Задание 5.4. Производные тригонометрических функций

Вариант 1

1. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. Вычислите $f'(\frac{2\pi}{3})$.
2. $g(y) = \sin \frac{\pi}{y}$. Сколько экстремальных точек имеет функция $g(y)$ на промежутке $[1, \infty)$?
3. $h(z) = \operatorname{ctg} az$. Известно, что в точке $z = 1$ функция $h(z)$ возрастает. Возрастает ли она в любой натуральной точке?
4. $x(t) = (\sec^2 t + \operatorname{tg}^2 t)(\sec^4 t + \operatorname{tg}^4 t)(\sec^8 t + \operatorname{tg}^8 t) \dots (\sec^{64} t + \operatorname{tg}^{64} t)$.
Вычислите $x'(\frac{3\pi}{4})$.
5. Найдите функцию $f(x)$, такую, что $f'(x) = \sin^2 x$.

Вариант 2

1. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$. Вычислите $f'(\frac{2\pi}{3})$.
2. $g(y) = \cos \frac{\pi}{y}$. Сколько экстремальных точек имеет функция $g(y)$ на промежутке $[1, \infty)$?
3. $h(z) = \operatorname{tg} az$. Известно, что в точке $z = 1$ функция $h(z)$ убывает. Убывает ли она в любой натуральной точке?
4. $x(t) = (\operatorname{cosec}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t)(\operatorname{cosec}^4 t + \operatorname{ctg}^4 t)(\operatorname{cosec}^8 t + \operatorname{ctg}^8 t) \dots$
 $\dots (\operatorname{cosec}^{64} t + \operatorname{ctg}^{64} t)$. Вычислите $x'(-\frac{\pi}{4})$.
5. Найдите функцию $f(x)$, такую, что $f'(x) = \cos^2 x$.

Задание 5.5. Производные тригонометрических функций

Вариант 1

1. Под каким углом пересекаются в первой четверти графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$?
2. $y = \cos(\arcsin x)$. Упростите выражение $(1 - x^2)y'' - xy' + y$.
3. При каких значениях a функция $y = \sin ax$ убывает на промежутке $[1, 2]$ и возрастает на промежутке $[0, 1]$?
4. При каких значениях k уравнение $t + \cos t = k$ имеет единственный корень?
5. Могут ли парабола $y = ax^2$ и график функции $y = -\cos x$ иметь общую касательную?

Вариант 2

1. Под каким углом пересекаются в четвертой четверти графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$?
2. $y = \sin(\arccos x)$. Упростите выражение $(1 - x^2)y'' - xy' + y$.
3. При каких значениях a функция $y = \cos ax$ убывает на промежутке $[0, 1]$ и возрастает на промежутке $[1, 2]$?
4. При каких значениях k уравнение $t + \sin t = k$ имеет единственный корень?
5. Могут ли парабола $y = ax^2$ и график функции $y = \cos x$ иметь общую касательную?

Задание 5.6. Графики тригонометрических функций

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции:
а) $y = |0,5 - 2\sin(0,5x - 1)|$; б) $y = \sin^2 x + \cos x$;
в) $y = \sin(\cos x)$.
2. Имеет ли уравнение $\operatorname{tg} x = -5x^2 + 10x - 4,5$ решение на промежутке $(0, 0,5\pi)$?

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции:

а) $y = |2 \cos(0,5x + 2) - 0,5|$; б) $y = \sin x + \cos^2 x$;

в) $y = \cos(\sin x)$.

2. Имеет ли уравнение $\operatorname{tg} x = 5x^2 + 10x + 4,5$ решение на промежутке $(-0,5\pi, 0)$?

Задание 5.7. Интегрирование тригонометрических функций

Вариант 1

1. Вычислите $f(-\frac{\pi}{3})$, если $f'''(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$.

2. Вычислите $\int_{-0,5\pi}^{1,5\pi} |\cos x| dx$.

3. Докажите, что $\int_0^{0,25\pi} \frac{\sec^2 y}{2 + \operatorname{tg}^2 y} dy < 0,5$.

4. Найдите $\int \operatorname{tg}^6 z dz$.

5. Сравните $\int_0^{0,5\pi} \sqrt{\sin x - \sin^2 x} dx$ и $\int_0^{0,5\pi} \sqrt{\cos x - \cos^2 x} dx$.

Вариант 2

1. Вычислите $f(-\frac{\pi}{6})$, если $f'''(x) = \cos 2x + \sin 2x$, $f(0) = 0$, $f(0,5\pi) = 0,5$.

2. Вычислите $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

3. Докажите, что $\int_{0,25\pi}^{0,5\pi} \frac{\operatorname{cosec}^2 y}{2 + \operatorname{ctg}^2 y} dy < 0,5$.

4. Найдите $\int \operatorname{ctg}^6 z dz$.

5. Сравните $\int_0^{0,5\pi} \sqrt{\sin x + \sin^2 x} dx$ и $\int_0^{0,5\pi} \sqrt{\cos x + \cos^2 x} dx$.

Задание 5.8. Гармонические колебания

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $y = -3\sin(2|x| - \frac{\pi}{3})$.
2. Функция $y(x)$ такова, что $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. При каких значениях x на промежутке $[0, 2\pi]$ $y > 0$?
3. Функция $y(x)$ такова, что $y'' + 0,25y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$. Найдите площадь, ограниченную ее графиком и осью X на промежутке между двумя ее соседними корнями.
4. Найдите функцию $f(x)$, такую, что $f''(x) + 4f(x) = \sin x$.

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $y = -0,5\cos(0,5|x| + \frac{\pi}{6})$.
2. Функция $y(x)$ такова, что $y'' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. При каких значениях x на промежутке $[0, 2\pi]$ $y > 0$?
3. Функция $y(x)$ такова, что $y'' + \frac{1}{9}y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$. Найдите площадь, ограниченную ее графиком и осью X на промежутке между двумя ее соседними корнями.
4. Найдите функцию $f(x)$, такую, что $f''(x) + 4f(x) = \cos x$.

Задание 5.9. Контрольное задание

Вариант 1

1. $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$. Имеет ли решение уравнение $f(x) - f'(x)\cos x + f''(x)\cos^2 x = 0$?
2. Нарисуйте график функции $y = \frac{1 + \cos x}{3 - \sin x}$.
3. Верно ли для каждого t из промежутка $[0, 0,5\pi)$ неравенство $2\sin t + \operatorname{tg} t \geq 3t$?
4. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 1. Угол A равен 60° . Найдите наибольшее значение периметра треугольника.
5. Вычислите площадь, ограниченную графиком функции $y = \sec^2 x$ и касательными к нему в точках с абсциссами $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$.
6. Фигура задана условиями:
 $y \leq a \sin x$, $y \leq \frac{1}{a} \cos x$ ($a > 0$), $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 0,5\pi$.
Найдите экстремальные значения ее площади.

7. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}}{n}$.

Вариант 2

1. $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$. Имеет ли решение уравнение $f(x) - f'(x)\sin x + f''(x)\sin^2 x = 0$?
2. Нарисуйте график функции $y = \frac{1 + \cos x}{3 + \sin x}$.
3. Верно ли для каждого t из промежутка $[0, 0,5\pi)$ неравенство $\sin t + 2\operatorname{tg} t \geq 3t$?
4. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 1. Угол A равен 120° . Найдите наибольшее значение периметра треугольника.
5. Вычислите площадь, ограниченную графиком функции $y = \operatorname{cosec}^2 x$ и касательными к нему в точках с абсциссами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.
6. Фигура задана условиями:
 $y \leq a \cos x$, $y \leq \frac{1}{a} \sin x$ ($a > 0$), $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 0,5\pi$.
 Найдите экстремальные значения ее площади.

7. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}}{2n}$.

Тема 6

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задание 6.1. Уравнения и неравенства для тангенса и котангенса

Вариант 1

1. Решите уравнение:
 а) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0$ на промежутке $[0, 2\pi]$;
 б) $\sqrt{\operatorname{tg} y - a} = \sqrt{1 - \operatorname{tg} y}$; в) $|\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t| = 2 - \operatorname{tg}^2 t$.

2. Решите неравенство:

а) $\operatorname{tg}^2 x > \operatorname{tg} x$;

б) $\operatorname{tg} x - 1 < \sqrt{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x} - 2$ на промежутке $[-0,5\pi, 1,5\pi]$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0$ на промежутке $[0, 2\pi]$;

б) $\sqrt{\operatorname{ctg} y - 1} = \sqrt{a - \operatorname{ctg} y}$; в) $|\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t| = 2 - \operatorname{ctg}^2 t$.

2. Решите неравенство:

а) $\operatorname{ctg}^2 x < \operatorname{ctg} x$;

б) $\operatorname{ctg} x - 1 < \sqrt{\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x} - 2$ на промежутке $[0, 2\pi]$.

Задание 6.2. Уравнения и неравенства для синуса

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin x \sin 2x}{1 - \sin x} = 0$ на промежутке $[0, 2\pi]$;

б) $\sin x + \sin 3x + \sin 7x = 3$; в) $\sin(\sin x) = 0$.

2. Решите неравенство:

а) $\sin^2 2x < 0,25$ на промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$;

б) $4y^2 - 4y > \sin y - 2$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin x \sin 0,5x}{1 + \sin x} = 0$ на промежутке $[0, 2\pi]$;

б) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = -3$; в) $\sin(\sin x) = 1$.

2. Решите неравенство:

а) $\sin^2 0,5x < 0,75$ на промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$;

б) $-4y^2 - 4y < \sin y + 2$.

Задание 6.3. Уравнения и неравенства для косинуса

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\cos x}{\cos(x-1) \cos(x+1)} = 0$ на промежутке $[1, 5]$;

б) $|0,5 + \cos t| + |0,5 - \cos t| = \frac{2}{3}$; в) $a \cos^2 z = 1$.

2. Решите неравенство:

а) $\cos^2 0,25x > 0,75$ на промежутке $[0, 2\pi]$;

б) $|\cos^2 y - \cos y - 1| > \cos y$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\cos x}{\cos(2-x) \cos(2+x)} = 0$ на промежутке $[1, 5]$;

б) $|0,5 + \cos t| + |-0,5 + \cos t| = \frac{1}{3}$; в) $a \cos^2 z = -1$.

2. Решите неравенство:

а) $\cos^2 2x > 0,25$ на промежутке $[0; 0,5\pi]$;

б) $|\cos^2 y + \cos y - 1| > -\cos y$.

Задание 6.4. Уравнения для синуса и косинуса

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin x - \cos x}{1 - \sin 2x} = 0$;

б) $\sec x - 6 \cos x = 4 \sin x$;

в) $|\sin x + \cos x| = \cos x - \sin x$ на промежутке $[0, 2\pi]$;

г) $\frac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin x \cos x} = 1$.

2. При каких значениях a уравнение $\sin z + \cos z = a$ имеет на промежутке $[0, 2\pi]$ единственный корень?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin 2x} = 0$ на промежутке $[0, 2\pi]$;

б) $\operatorname{cosec} x - 6 \sin x = 4 \cos x$;

в) $|\sin x - \cos x| = \cos x + \sin x$ на промежутке $[0, 2\pi]$;

г) $\frac{\cos^2 x - \sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x \cos x} = 1$.

2. При каких значениях a уравнение $\sin z - \cos z = a$ имеет на промежутке $[0, 2\pi]$ единственный корень?

Задание 6.5. Уравнения для всех тригонометрических функций

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin 2x \cos 3x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$ на промежутке $[0, \pi]$;

б) $\sqrt{1 + \operatorname{ctg} x} = \operatorname{cosec} x$; в) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

2. При каких значениях a имеет решение уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 2a \operatorname{tg} x \cos 4x + a^2 = 0?$$

3. Нарисуйте график числа решений на промежутке $[0, 2\pi]$ уравнения $\operatorname{tg} x - 1 = a(\sin x - \cos x)$ при $a > 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\frac{\cos 2x \sin 3x}{1 + \operatorname{ctg} x} = 0$ на промежутке $[0, \pi]$;

б) $\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} = \sec x$; в) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

2. При каких значениях a имеет решение уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x + 2a \operatorname{ctg} x \sin 2x + a^2 = 0?$$

3. Нарисуйте график числа решений на промежутке $[0, 2\pi]$ уравнения $\operatorname{tg} x + 1 = a(\sin x + \cos x)$ при $a > 0$.

Задание 6.6. Неравенства для всех тригонометрических функций

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x \sin 4x} \geq 0$ на промежутке $[0, \pi]$;

б) $a \cos^2 z - (a^2 + 1) \cos z + a \leq 0$ при $0 \leq a \leq 1$;

в) $|\sin x - \operatorname{tg} x| > \sin x$ на промежутке $(0; 0,5\pi)$.

2. Докажите, что неравенство $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{sech} x) > 1$ имеет решения, сколь угодно близкие к $0,5\pi$.

3. Пусть $\operatorname{ctg} z > 1$ и $\sin z > a$. Следует ли из этого, что $\cos z > a$?

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos 2x \sin x} \geq 0$ на промежутке $[0, \pi]$;

б) $a \cos^2 z - (a^2 + 1) \cos z + a \leq 0$ при $-1 \leq a \leq 0$;

в) $|\sin x + \operatorname{tg} x| > -\sin x$ на промежутке $(-0,5\pi, 0)$.

2. Докажите, что неравенство $\operatorname{ctg}(\pi \operatorname{cosech} x) > 1$ имеет решения, сколь угодно близкие к нулю.

3. Пусть $\operatorname{tg} z > 1$ и $\cos z > a$. Следует ли из этого, что $\sin z > a$?

Задание 6.7. Контрольное задание

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\cos(\pi \sqrt{x-4}) \cos(\pi \sqrt{x}) = 1$;

б) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

2. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 y - (a^2 - 3) \sin y + a^2 - 4 = 0$$

имеет два решения на промежутке $[\frac{\pi}{6}, 2\pi]$?

3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{\cos z - \sin z} \geq \sin z - 0,5$ на промежутке $[0, \pi]$;

б) $a \sin t + \cos t > \sec t$ при $a \geq 0$ на промежутке $[0, \pi]$.

4. Длины сторон прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите меньший острый угол этого треугольника.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\cos(\pi\sqrt{x-4}) \cos(\pi\sqrt{x}) = -1$;

б) $\sin^3 x + \cos^3 x = -1$.

2. При каких значениях a уравнение

$$\cos^2 y + (a^2 - 3) \cos y + a^2 - 4 = 0$$

имеет два решения на промежутке $[-\frac{\pi}{8}, 1,5\pi]$?

3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{\sin z - \cos z} \geq \cos z - 0,5$ на промежутке $[0, \pi]$;

б) $a \cos t + \sin t > \cos et$ при $a \geq 0$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

4. Длины сторон прямоугольного треугольника составляют геометрическую прогрессию. Найдите меньший острый угол этого треугольника.

Тема 7

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

Задание 7.1. Теорема сложения

Вариант 1

1. Вычислите $y'(\frac{\pi}{4})$, если

$$y = \sin(x - \pi) \operatorname{ctg}(1,5\pi + 0,5x) - \sin(1,5\pi - x).$$

2. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8} + x) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8} - x) - \frac{1}{3}}{x^2}$.

3. При каких значениях a имеет решение уравнение

$$\frac{\cos 2y \cos ay - \cos(a+2)y}{\operatorname{cosec} ay} = 0?$$

4. Вычислите сумму $\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{3}$.

5. Вычислите $\cos \beta$, если $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < 0,5\pi$, $\pi < \beta < 1,5\pi$.

Вариант 2

1. Вычислите $y'(\frac{\pi}{4})$, если

$$y = \sin(x - \pi) \operatorname{tg}(1,5\pi + 0,5x) + \sin(1,5\pi - x).$$

2. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} + x) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - x)}{x^2}$.

3. При каких значениях a имеет решение уравнение

$$\frac{\cos(a+1)y - \cos y \cos a y}{\cos e a y} = 0?$$

4. Вычислите сумму $\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{4}$.

5. Вычислите $\sin \beta$, если $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < 0,5\pi$, $\pi < \beta < 1,5\pi$.

Задание 7.2. Формулы кратных углов

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\sin^3(\alpha - 1,5\pi) \sin(3\alpha + 0,5\pi) + \cos^3(3,5\pi + \alpha) \cos(3\alpha - 2,5\pi).$$

2. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, которая удовлетворяет условию $F(0) = 0$, если

$$f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x} \text{ и } -0,75\pi \leq x \leq 0,25\pi.$$

3. Вычислите экстремальные значения функции

$$\varphi(y) = \cos(2\arcsin(\operatorname{tg} y)).$$

4. Решите уравнение $4\sin^4 0,5z - 4\sin^2 0,5z + 1 = |a - \cos^2 z|$.

5. Является ли рациональным числом $\operatorname{tg} 5^\circ$?

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\sin^3(\alpha - 1,5\pi) \sin(3\alpha - 2,5\pi) + \cos^3(3,5\pi + \alpha) \cos(3\alpha + 0,5\pi).$$

2. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, которая удовлетворяет условию $F(\pi) = 0$, если

$$f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x} \text{ и } 0,25\pi \leq x \leq 1,25\pi.$$

3. Вычислите экстремальные значения функции

$$\varphi(y) = \cos(2 \arccos(\operatorname{tg} y)).$$

4. Решите уравнение $4 \cos^4 0,5z - 4 \cos^2 0,5z + 1 = |\cos^2 z - a|$.

5. Является ли рациональным числом $\operatorname{tg} 7,5^\circ$?

Задание 7.3. Формулы половинных углов

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\sin 2x + 2 \sin x \cos 2x} < 1, \text{ если } 0 \leq x \leq \pi.$$

2. Нарисуйте график функции $f(x) = \sin(0,5 \operatorname{arctg} x)$.

3. Нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\sin^2 x = \cos^2 0,5y$, $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$.

4. Сколько решений на промежутке $[-0,5\pi, 0,5\pi]$ имеет уравнение $\sin(2t - 1,5\pi) - \cos(0,5\pi + 2t) = |\operatorname{tg} t|$?

5. Вычислите $\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x}{\sin 2x + 2 \cos x \cos 2x} < 1, \text{ если } -0,5\pi \leq x \leq 1,5\pi.$$

2. Нарисуйте график функции $f(x) = \cos(0,5 \operatorname{arctg} x)$.

3. Нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\sin^2 y = \cos^2 0,5x$, $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$.

4. Сколько решений на промежутке $[-0,5\pi, 0,5\pi]$ имеет уравнение $\sin(2t + 0,5\pi) + \cos(2t - 1,5\pi) = |\operatorname{tg} t|$?

5. Вычислите $\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \frac{dx}{3 + \cos x}$.

Задание 7.4. Формулы понижения степени

Вариант 1

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью x и графиком функции $f(x) = \sin^2 2x$ на промежутке между двумя соседними нулями этой функции.
2. $y(x) = \sin(x+1) \sin(x-1)$. Сколько раз график этой функции пересечет график функции $y = x$?
3. Решите уравнение $\frac{\cos 3z \cos 4z + \sin 2z \sin 5z}{\cos 2z + \cos 4z} = 0$.
4. Вычислите $\int_0^{\pi} \sin^3 2x \cos^2 3x dx$.
5. Вычислите $\cos 175^\circ \cos 235^\circ \sin 335^\circ$.

Вариант 2

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью x и графиком функции $f(x) = \cos^2 2x$ на промежутке между двумя соседними нулями этой функции.
2. $y(x) = \sin(1+x) \sin(1-x)$. Сколько раз график этой функции пересечет график функции $y = x$?
3. Решите уравнение $\frac{\sin 3z \sin 4z + \cos 2z \cos 5z}{\sin 2z + \sin 4z} = 0$.
4. Вычислите $\int_0^{\pi} \sin^3 2x \sin^2 3x dx$.
5. Вычислите $\cos 185^\circ \sin 325^\circ \cos 245^\circ$.

Задание 7.5. Формулы повышения степени

Вариант 1

1. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\sin(a+x) - \sin(a-x)}$, $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Решите уравнение $\cos 10y - \cos 8y - \cos 6y + 1 = 0$.
3. Сравните с нулем значение выражения $\frac{\sin 1 + \sin 4 + \sin 5}{\cos 2 + \cos 3}$.
4. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Вычислите $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - 4 \cos 0,5\alpha \cos 0,5\beta \cos 0,5\gamma$.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y = a, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = a + 1. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\cos(a+x) - \cos(a-x)}$, $a \neq \frac{\pi}{2}h$, $h \in \mathbb{Z}$.
2. Решите уравнение $\sin 10y - \cos 8y + \sin 6y + 1 = 0$.
3. Сравните с нулем значение выражения $\frac{\sin 2 + \sin 3 + \sin 5}{\sin 4 - \sin 1}$.
4. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Вычислите $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma - 4 \sin 0,5\alpha \sin 0,5\beta \cos 0,5\gamma$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = a, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = a + 1. \end{cases}$$

Задание 7.6. Контрольное задание

Вариант 1

Дана функция $f(x) = \sin^2 x$.

1. Нарисуйте график этой функции.
2. Вычислите большую площадь фигуры, ограниченной графиком функции и осью X на промежутке между соседними точками перегиба этого графика.
3. В каких границах лежит угол между касательными, проведенными в точках графика этой функции, симметричных относительно прямой $x = 0,5\pi$, если график рассматривается на $[0, \pi]$?
4. Докажите, что касательные к графику, проведенные в двух точках, симметричных относительно оси Y , могут пересечься под прямым углом.

Вариант 2

Дана функция $f(x) = \cos^2 x$.

1. Нарисуйте график этой функции.
2. Вычислите большую площадь фигуры, ограниченной графиком функции и осью X на промежутке между соседними точками перегиба этого графика.
3. В каких границах лежит угол между касательными, проведенными в точках графика этой функции, симметричных

относительно прямой $x = 0$, если график рассматривается на $[-0,5\pi, 0,5\pi]$?

4. Докажите, что касательные к графику, проведенные в двух точках, симметричных относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, могут пересечься под прямым углом.

Задание 7.7. Контрольное задание

Вариант 1

1. Решите неравенство $|\sin 2x + \cos 2x| < 1$.
2. $f(x) = \cos x \cos 2x$.
 - а) Найдите для $f(x)$ такую первообразную $F(x)$, что $F(0) = 0$.
 - б) Нарисуйте график этой первообразной.
 - в) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком первообразной и осью X на промежутке между двумя ближайшими точками максимума этого графика.
3. Пусть $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Вычислите $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$.
4. Упростите выражение $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ при $x \geq 1$.
5. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтальной плоскостью угол 30° , лежит тело массой m . К нему приложена сила, которая составляет угол α с этой плоскостью. Она должна поднять тело по наклонной плоскости. Коэффициент трения равен $0,2$. При каком угле эта сила имеет наименьшее значение?

Вариант 2

1. Решите неравенство $|\sin 0,25x + \cos 0,25x| < 1$.
2. $f(x) = \sin x \sin 2x$.
 - а) Найдите для $f(x)$ такую первообразную $F(x)$, что $F(0) = 0$.
 - б) Нарисуйте график этой первообразной.
 - в) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком первообразной и осью X на промежутке между двумя ближайшими точками максимума этого графика.
3. Пусть $\alpha + \beta + \gamma = 0,5\pi$. Вычислите $-\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$.

4. Упростите выражение $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ при $x \leq -1$.
5. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтальной плоскостью угол 60° , лежит тело массой m . К нему приложена сила, которая составляет угол α с этой плоскостью. Она должна поднять тело по наклонной плоскости. Коэффициент трения равен 0,2. При каком угле эта сила имеет наименьшее значение?

Тема 8

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Задание 8.1. Свойства обратных тригонометрических функций. Производная этих функций

Вариант 1

- Решите уравнение $(\arcsin(-x))^2 + (\arccos x)^3 = 36$.
- Решите неравенство $\arcsin(y^2 - y + 1) < \arccos(y^2 + y + 1)$.
- $y(x) = \arcsin ax$. Найдите a , если $\frac{y''}{y'} = \frac{x}{1-x^2}$.
- Пусть $a \neq 0$, $|a| \leq 1$. Найдется ли такое значение x , при котором $\arcsin(x-a)$, $\arcsin x$, $\arcsin(x+a)$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?
- Пусть $y_1 = \arcsin ax$, $y_2 = \arccos x - 0,5\pi$. Могут ли графики этих функций пересекаться под прямым углом?

Вариант 2

- Решите уравнение $(\arcsin x)^2 + (\arccos(-x))^3 = 36$.
- Решите неравенство $\arcsin(y^2 + y + 1) < \arccos(y^2 - y + 1)$.
- $y(x) = \arccos ax$. Найдите a , если $\frac{y''}{y'} = \frac{x}{1-x^2}$.
- Пусть $a \neq 0$, $|a| \leq 1$. Найдется ли такое значение x , при котором $\arccos(x-a)$, $\arccos x$, $\arccos(x+a)$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

5. Пусть $y_1 = \arccos a x$, $y_2 = \arcsin x + 0,5\pi$. Могут ли графики этих функций пересекаться под прямым углом?

Задание 8.2. Графики обратных тригонометрических функций

Вариант 1

- Нарисуйте график функции:
а) $y = |-2 - \arcsin(2 - |x|)|$; б) $y = \arcsin \sqrt{x}$;
в) $y = \arcsin x^{-1}$; г) $y = \arccos(\sin x)$.
- Нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\arcsin(xy) = \arcsin(x + y)$.

Вариант 1

- Нарисуйте график функции:
а) $y = |-2 - \arcsin(-2 + |x|)|$; б) $y = \arccos \sqrt{x}$;
в) $y = \arccos x^{-1}$; г) $y = \arcsin(\cos x)$.
- Нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\arccos(xy) = \arccos(x + y)$.

Задание 8.3. Тождества, уравнения и неравенства, содержащие арксинус и арккосинус

Вариант 1

- Решите уравнение $\arcsin x = \arccos \frac{x^2 + 1}{2x}$.
- Найдите целые решения неравенства $\arccos(x^2 - 3x) \geq \frac{\pi}{3}$.
- Верно ли неравенство $\arcsin 2x \geq x$, если $0 \leq x \leq 0,5$?
- а) Сравните $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$.
б) Обобщите полученный результат.
- Упростите выражение
$$\arccos x + \arccos y - \arccos(xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2}),$$
если $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Вариант 2

- Решите уравнение $\arccos x = \arcsin \frac{x^2 + 1}{2x}$.

2. Найдите целые решения неравенства $\arcsin(x^2 - 3x) \geq -\frac{\pi}{6}$.
3. Верно ли неравенство $\arcsin 0,5x \geq x$, если $0 \leq x \leq 2$?
4. а) Сравните $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$.
б) Обобщите полученный результат.
5. Упростите выражение

$$\arcsin x - \arcsin y - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}),$$
 если $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Задание 8.4. Интегрирование при помощи арксинуса и арккосинуса

Вариант 1

1. $f(x) = (1 - 9x^2)^{-0,5}$. Нарисуйте график той первообразной для функции $f(x)$, которая при $x = 0$ равна $0,5\pi$.
2. Вычислите $\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ при $a > 0$.
3. Найдите $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, если $x > 1$.

Вариант 2

1. $f(x) = (1 - 4x^2)^{-0,5}$. Нарисуйте график той первообразной для функции $f(x)$, которая при $x = 0$ равна $0,5\pi$.
2. Вычислите $\int_a^{-a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ при $a < 0$.
3. Найдите $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, если $x < -1$.

Задание 8.5. Свойства обратных тригонометрических функций. Производная этих функций

Вариант 1

1. $y = \operatorname{arctg} x, z = ay + b$. Есть ли такие значения a и b , при которых областью значений функции $z(x)$ является промежуток $(0, 1)$?

2. В последовательности (x_n) $x_1 = 100$, $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$. Вычислите $\lim x_n$.
3. $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \operatorname{arctg} (t^{-1})$. Существует ли зависимость y от x ?
4. При каком значении a график функции $y = \operatorname{arccctg} ax$ пересекает прямую $x = 0$ под углом 45° ?
5. Сравните, не вычисляя, $0,75 + \operatorname{arctg} 3$ и $2\operatorname{arctg} 2$.

Вариант 2

1. $y = \operatorname{arctg} x$, $z = ay + b$. Есть ли такие значения a и b , при которых областью значений функции $z(x)$ является промежуток $(-1, 0)$?
2. В последовательности (x_n) $x_1 = -100$, $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$. Вычислите $\lim x_n$.
3. $x = \operatorname{arccctg} t$, $y = \operatorname{arctg} (t^{-1})$. Существует ли зависимость y от x ?
4. При каком значении a график функции $y = \operatorname{arccctg} \frac{x}{a}$ пересекает прямую $x = 0$ под углом 45° ?
5. Сравните, не вычисляя, $1 + \operatorname{arccctg} 3$ и $2\operatorname{arccctg} 2$.

Задание 8.6. Графики обратных тригонометрических функций

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции:
 а) $y = \operatorname{arctg} x - x$; б) $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{arccctg} x)$;
 в) $y = \operatorname{arccctg} (1 - 2|x|)$.
2. Решите неравенство $\operatorname{arccctg} z > \operatorname{arctg} z^2$.
3. Сколько решений имеет уравнение $\operatorname{arctg} x = ax^2$ при $a > 0$?

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции:
 а) $y = x - \operatorname{arccctg} x$; б) $y = \operatorname{arccctg} (\operatorname{arctg} x)$;
 в) $y = \operatorname{arccctg} (0,5|x| - 1)$.
2. Решите неравенство $\operatorname{arctg} z < \operatorname{arccctg} z^2$.
3. Сколько решений имеет уравнение $\operatorname{arctg} x = ax^2$ при $a < 0$?

**Задание 8.7. Тождества, уравнения и неравенства,
содержащие арктангенс и арккотангенс**

Вариант 1

1. Решите уравнение:
а) $\operatorname{arctg}(1-a) - \operatorname{arctg}(a+1) = 0,25\pi$;
б) $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x$, если $x > 0$.
2. Нарисуйте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\operatorname{arctg}(x+y) = \operatorname{arctg} x$.
3. Вычислите $2\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 0,75$.
4. а) Докажите неравенство $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 \leq 1$.
б) Обобщите этот результат.

Вариант 2

1. Решите уравнение:
а) $-\operatorname{arctg}(1-a) + \operatorname{arctg}(1+a) = 0,25\pi$;
б) $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x$, если $x < 0$.
2. Нарисуйте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\operatorname{arctg}(x+y) = \operatorname{arctg} x$.
3. Вычислите $2\operatorname{arctg} 0,25 + \operatorname{arctg} \frac{7}{23}$.
4. а) Докажите неравенство $\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 3 \leq 1$.
б) Обобщите этот результат.

**Задание 8.8. Интегрирование при помощи
арктангенса и арккотангенса**

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $y = \frac{x}{1+x^4}$ и вычислите площадь, ограниченную графиком и осью x на промежутке $[0, 1]$.
2. $f(x) = (x^4 + 3x^2 + 2)^{-1}$. Исследуйте на монотонность ту первообразную для функции $f(x)$, которая равна 0 при $x = 0$.
3. Можно ли, не вычисляя интегралов, проверить неравенство

$$\left| \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} \right| < 0,1?$$

4. Найдите $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 4}$.

5. Докажите, что $\frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{1,09} + \dots + \frac{1}{1,81} < 7,5$.

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $y = -\frac{x}{1+x^4}$ и вычислите площадь, ограниченную графиком и осью x на промежутке $[0, 1]$.

2. $f(x) = (x^4 + 4x^2 + 3)^{-1}$. Исследуйте на монотонность ту первообразную для функции $f(x)$, которая равна 0 при $x = 0$.

3. Можно ли, не вычисляя интегралов, проверить неравенство

$$\left| \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 0,25} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 0,5} \right| < 2,5?$$

4. Найдите $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 2}$.

5. Докажите, что $\frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{1,09} + \dots + \frac{1}{1,81} > 6,5$.

Задание 8.9. Контрольное задание

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = -2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

2. Решите неравенство $\arccos(0,5x - 1) \geq 2 \operatorname{arctg}(3 - x)$.

3. Пусть $x + \arcsin x = y + \arcsin y$. Докажите, что $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} y$.

4. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} ax}$.

5. Решите уравнение

$$\operatorname{arctg} \sqrt{x(x-1)} + \arccos \sqrt{x^2 - x + 1} = 0,5\pi.$$

6. Нарисуйте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию

$$1 - \operatorname{tg} 0,25\pi x + \arccos(x + |\sin y|) = 0.$$

7. Докажите, что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}.$$

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x - \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

2. Решите неравенство $\arcsin \left(\frac{x}{6} + 0,5 \right) < 2 \operatorname{arctg} (4-x)$.

3. Пусть $x + \operatorname{arctg} x = y + \operatorname{arctg} y$. Докажите, что $\arcsin x = \arcsin y$.

4. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin ax}$.

5. Решите уравнение

$$\operatorname{arctg} \sqrt{x(x+1)} + \arcsin \sqrt{x^2 + x + 1} = 0,5\pi.$$

6. Нарисуйте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию

$$1 - \operatorname{tg} 0,25\pi x + \arccos (x + |\cos y|) = 0.$$

7. Докажите, что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+2}.$$

Тема 9

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Задание 9.1. Предел показательной функции

Вариант 1

1. Вычислите $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{2x}$.

2. Есть ли асимптоты у графика функции $f(x) = \frac{e^x + e^{3x}}{x}$?

3. Найдите функцию $f(x)$, такую, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = +\infty.$$

4. а) Вычислите $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$.

б) Обобщите полученный результат.

Вариант 2

1. Вычислите $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{0,5x}$.

2. Есть ли асимптоты у графика функции $f(x) = \frac{e^x + e^{2x}}{x}$?

3. Найдите функцию $f(x)$, такую, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)} = +\infty.$$

4. а) Вычислите $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}$.

б) Обобщите полученный результат.

Задание 9.2. Производная показательной функции

Вариант 1

1. $f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} + 1 \right)^2$. Будет ли функция $f(x)$ монотонной на области определения?

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{-x} \cos x$ при $x = 0$.

3. Исследуйте на экстремум функцию $h(z) = \frac{e^{-az} - e^{az}}{e^{az} + e^{-az}}$.

4. Докажите, что при $x \geq 0$ $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$.

5. Найдите функцию $y(x)$, такую, что $y''' - y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 0$.

Вариант 2

1. $f(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} + 1 \right)^2$. Будет ли функция $f(x)$ монотонной на области определения?

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{-x} \sin x$ при $x = 0$.
3. Исследуйте на экстремум функцию $h(z) = \frac{e^{az} - e^{-az}}{e^{az} + e^{-az}}$.
4. Докажите, что при $x \geq 0$ $e^x \leq 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 e^x$.
5. Найдите функцию $y(x)$, такую, что $y''' + y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 0$.

Задание 9.3. Свойства показательной функции

Вариант 1

1. Сравните два числа: $\sqrt{2 + \sqrt{3}}^{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ и $\sqrt{2 - \sqrt{3}}^{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.
2. Решите уравнение $3^x + 4 = 5^{1-x}$.
3. Решите неравенство $2^{-|x-2|} \sin x \geq 1$.
4. Сколько решений имеет уравнение $a^x + a^{-x} + z^2 = 1987$ при $a > 0$?
5. Могут ли графики функций $y = a^x$ ($a > 1$) и $y = b^x$ ($b > 1$) иметь две общие точки ($a \neq b$)?

Вариант 2

1. Сравните два числа: $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$ и $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}$.
2. Решите уравнение $5^x + 15 = 4^{2-x}$.
3. Решите неравенство $2^{-|x-1|} \cos x \geq 1$.
4. Сколько решений имеет уравнение $a^x + a^{-x} + |z| = 1987$ при $a > 0$?
5. Могут ли графики функций $y = a^x$ ($a < 1$) и $y = b^x$ ($b < 1$) иметь две общие точки ($a \neq b$)?

Задание 9.4. График показательной функции

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|+|x+1|}$; б) $y = \frac{e^x}{x}$.

2. $f(t) = a2^t + 1$, $g(t) = 2^{-t} + a$. При каком значении a графики функций f и g имеют единственную общую точку?

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+2|+|x-1|}$; б) $y = \frac{x}{e^x}$.

2. $f(t) = 2^t + a$, $g(t) = a2^{-t} + 1$. При каком значении a графики функций f и g имеют единственную общую точку?

Задание 9.5. Интегрирование показательной функции

Вариант 1

1. Найдите $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

2. Верно ли, что $\int_0^1 (e^{x^2} + e^{-x^2}) dx > 2$?

3. $f(x) = e^x$. При каком значении $a > 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции f и осью x на промежутке $[0, a]$, равна площади фигуры, ограниченной этим же графиком и осью x на промежутке $[a, 3a]$?

4. Исследуйте на сходимость $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

5. Нарисуйте график той первообразной для функции $y = e^{-|x|}$, которая при $x = -1$ равна e^{-1} .

Вариант 2

1. Найдите $\int \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} dx$.

2. Верно ли, что $\int_0^1 (e^{x^{2.5}} + e^{-(x^{2.5})}) dx > 2$?
3. $f(x) = e^{-x}$. При каком значении $a > 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции f и осью x на промежутке $[0, 2a]$, равна площади фигуры, ограниченной этим же графиком и осью x на промежутке $[2a, 3a]$?
4. Исследуйте на сходимость $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$.
5. Нарисуйте график той первообразной для функции $y = e^{|x|}$, которая при $x = 1$ равна e .

Задание 9.6. Дифференциальное уравнение показательной функции

Вариант 1

1. Найдите функцию $y(x)$, удовлетворяющую условию:
 а) $y' = 2y$ и $y(2x) = 0.5y(x)$; б) $y \cdot y' = e^{2x}$ и $y(0) = 1$;
 в) $4y''' - y' = 0$, $y(0) = 2$ и $y(2) = e + e^{-1}$.
2. Вещество A вступило в реакцию с другим веществом. Скорость реакции пропорциональна количеству вещества A . Через 1 ч после начала реакции осталось 100 г вещества A , а через 3 ч осталось 25 г вещества A . Сколько вещества A было в начале реакции?

Вариант 2

1. Найдите функцию $y(x)$, удовлетворяющую условию:
 а) $y' = 0.5y$ и $y(2x) = 2y(x)$; б) $y \cdot y' = e^{0.5x}$ и $y(0) = 2$;
 в) $y''' - 4y' = 0$, $y(0) = 2$ и $y(1) = e^2 + e^{-2}$.
2. При брожении скорость прироста фермента пропорциональна его количеству. Через 2 ч после начала брожения стало 6 г фермента, а через 6 ч стало 24 г фермента. Сколько было фермента в начале брожения?

Задание 9.7. Контрольное задание

Вариант 1

- а) Нарисуйте график функции $y = e^x \sin x$.
б) Какой угол с осью x образует касательная к графику в точке с абсциссой $x = 0$?
в) Докажите, что площадь S фигуры, ограниченной графиком и осью X на промежутке $[0, 1]$ удовлетворяет неравенству $S < 1$.
- Решите уравнение $2^{-|x-3|} - |x^2 - x - 6| = 1$.
- Докажите, что уравнение $2x + e^x - x \cdot e^x = 1$ имеет положительный корень.
- Решите неравенство $10^x + 11^x > (\sqrt{221})^x$.
- Найдите функцию $y(x)$, которая удовлетворяет условию $y' = e^x \cdot y$ и $y'' = 2y'$.
- Докажите, что при $a + b + c = 0$ $3^a + 3^b + 3^c \geq 3$.

Вариант 2

- а) Нарисуйте график функции $y = e^x \cos x$.
б) Какой угол с осью x образует касательная к графику в точке с абсциссой $x = 0$?
в) Докажите, что площадь S фигуры, ограниченной графиком и осью X на промежутке $[0, 1]$ удовлетворяет неравенству $S > 1$.
- Решите уравнение $3^{-|x-3|} - |x^2 - x - 6| = 1$.
- Докажите, что уравнение $3x + e^x - x \cdot e^x = 1$ имеет положительный корень.
- Решите неравенство $9^x + 10^x < (\sqrt{181})^x$.
- Найдите функцию $y(x)$, которая удовлетворяет условию $y' = 2y$ и $y'' = y' \cdot e^x$.
- Докажите, что при $a + b + c = 0$ $3^{-a} + 3^{-b} + 3^{-c} \geq 3$.

Тема 10

ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Задание 10.1. Логарифмирование и потенцирование

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4$.
2. Вычислите $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}}$.
3. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a^2 + b^2 = 7ab$. Докажите, что $\lg \frac{a+b}{3} - 0,5(\lg a + \lg b) = 0$.
4. Пусть $\log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2(\sqrt{6}-2) = k$. Чему равно значение выражения $\log_2(\sqrt{3}-1) + \log_2(\sqrt{6}+2)$?
5. Докажите, что $\log_4 18$ — число иррациональное.

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \log_6 \frac{x^2}{6} - 2\log_6 6x^6$.
2. Вычислите $-\lg \lg \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}$.
3. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a^2 + b^2 = 11ab$. Докажите, что $\lg \frac{a-b}{3} - 0,5(\lg a + \lg b) = 0$.
4. Пусть $\log_4(\sqrt{5}+1) + \log_4(\sqrt{8}-2) = k$. Чему равно значение выражения $\log_4(\sqrt{5}-1) + \log_4(\sqrt{8}+2)$?
5. Докажите, что $\log_{16} 36$ — число иррациональное.

Задание 10.2. Переход к другому основанию

Вариант 1

1. Зависит ли y от b , если $\log_a y = 2 - \log_a(a^4 - b^4) + 2\log_{a^2}(a-b) - \log_{a^{-1}}(a+b) + 0,5\log_{\sqrt{a}}(a^2 + b^2)$?

2. а) Вычислите $\frac{\log_2 x \log_3 x + \log_3 x \log_5 x + \log_5 x \log_2 x}{\log_2 x \log_3 x \log_5 x} \log_{30} x$.
 б) Обобщите полученный результат.
3. Пусть $\log_{12} 27 = a$. Чему равен $\log_6 16$?
4. Сравните $\log_{20} 80$ и $\log_{80} 640$.
5. Верно ли неравенство $(\log_5 3)^{-1} + (\log_4 5)^{-1} < 2$?

Вариант 2

1. Зависит ли y от b , если
 $\log_a y = 2 + \log_{a^{-1}}(b^4 - a^4) + 2\log_{a^2}(b - a) + \log_a(b + a) +$
 $+ 0,25\log_{\sqrt[4]{a}}(a^2 + b^2)$?
2. а) Вычислите $\frac{\log_2 x \log_5 x + \log_5 x \log_7 x + \log_7 x \log_3 x}{\log_3 x \log_5 x \log_7 x} \log_{105} x$.
 б) Обобщите полученный результат.
3. Пусть $\log_6 16 = a$. Чему равен $\log_{12} 27$?
4. Сравните $\log_{15} 60$ и $\log_{80} 480$.
5. Верно ли неравенство $(\log_7 5)^{-1} + (\log_6 7)^{-1} < 2$?

Задание 10.3. Действия со степенями

Вариант 1

1. Вычислите $36^{\log_6 5} + 0,1^{\lg 2 - 1} - 3^{\frac{1}{\log_{27} 9}} + 2^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}}$.
2. Упростите $b^{\frac{\log_{1000} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{1000} b}{\lg b}}$.
3. а) Сравните $\sqrt{2^{\log_3 5}}$ и $\sqrt{5^{\log_3 2}}$.
 б) Обобщите полученный результат.
4. При каком натуральном x верно неравенство $6^{\frac{\log_5 \log_5 x}{\log_3 6}} < 1$?
5. а) Сравните 202^{203} и 303^{202} .
 б) Обобщите полученный результат.

Вариант 2

1. Вычислите $49^{\log_7 5} + 0,1^{\lg 8 - 1} - 4^{\frac{1}{\log_{49} 16}} + 3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}}$.

2. Упростите $b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}$.
3. а) Сравните $\sqrt{3^{\log_2 6}}$ и $\sqrt{5^{\log_2 3}}$.
 б) Обобщите полученный результат.
4. При каком натуральном x верно неравенство $7^{\frac{\log_6 \log_6 x}{\log_6 7}} < 1$?
5. а) Сравните $202\sqrt{202}$ и $303\sqrt{303}$.
 б) Обобщите полученный результат.

Задание 10.4. Производная логарифмической функции

Вариант 1

1. $f(x) = \ln(\sin x - \cos x)$. В каких точках касательная к графику этой функции параллельна оси x ?
2. $g(y) = \ln \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Найдите промежутки убывания функции $g(y)$.
3. $h(z) = \lg(z^2 - 8z + 15) - \log_{0,1}(z - 1)^{-1}$. Вычислите $h'(4)$.
4. Пусть $x > 0$. Верно ли неравенство $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$?
5. Найдите функцию f , такую, что $f'(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $x > -1$.

Вариант 2

1. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$. В каких точках касательная к графику этой функции параллельна оси x ?
2. $g(y) = \ln \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}$. Найдите промежутки возрастания функции $g(y)$.
3. $h(z) = \lg(z - 3)^{-1} - \log_{0,1}(z^2 - 8z + 12)$. Вычислите $h'(5)$.
4. Пусть $x > 0$. Верно ли неравенство $\ln x \leq x - 1$?
5. Найдите функцию f , такую, что $f'(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x > 1$.

Задание 10.5. Свойства логарифмической функции

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_2 \sin \pi x} + \sqrt{\log_{0,5} \sec x}.$$

2. Найдите область значений функции

$$g(y) = \log_{0,5} \frac{1+y^2}{1+y+y^2}.$$

3. Исследуйте на четность/нечетность функцию

$$h(z) = \lg(z + \sqrt{1+z^2}).$$

4. Определите знак выражения $\log_3 75 - \log_2 22$.

5. Сравните между собой $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x$ и $\log_{\operatorname{tg} x} \sin x$ на промежутке $(0; 0,25\pi)$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_2 \cos \pi x} + \sqrt{\log_{0,5} \operatorname{cosec} x}.$$

2. Найдите область значений функции

$$g(y) = \log_{0,5} \frac{y^2 + y + 1}{y^2 + 1}.$$

3. Исследуйте на четность/нечетность функцию

$$h(z) = \lg \frac{1+z}{1-z}.$$

4. Определите знак выражения $\log_4 60 - \log_3 30$.

5. Сравните между собой $\log_{\cos x} \operatorname{ctg} x$ и $\log_{\operatorname{ctg} x} \cos x$ на промежутке $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Задание 10.6. График логарифмической функции

Вариант 1

Нарисуйте график функции.

1. $y = \lg(4 - 2x)$. 2. $y = \sqrt{(\log_{0,5}(x+1))^2}$.

3. $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \log_{a^{-1}}(x - \sqrt{x^2 - 1})$.

4. $y = \frac{x}{\ln x - 1}$. 5. $y = \log_{\sin x}(1 - \cos 2x)$.

Вариант 2

Нарисуйте график функции.

1. $y = \log_{0,1}(4 + 2x)$. 2. $y = \sqrt{(\log_{0,5}(x - 1))^2}$.

3. $y = -\log_a(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_{a^{-1}}(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

4. $y = \frac{x}{\ln x + 1}$. 5. $y = \log_{\cos x}(1 + \cos 2x)$.

Задание 10.7. Интегрирование и логарифмическая функция

Вариант 1

1. При каком $x > 0$ верно равенство $\int_1^x \frac{dy}{y} = \int_x^{2x} \frac{dp}{p}$?

2. а) Найдите $\int \operatorname{ctg} t dt$.

б) Найдите ту первообразную для функции $y = \operatorname{ctg} t$, которая при $t = 0,5\pi$ равна 0.

в) Нарисуйте график этой первообразной на $(0, 2\pi)$.

3. Найдите при $x > 0$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.

4. Нарисуйте криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $[1, a]$ (при $a > 1$).

Соедините точки $(1, 0)$ и $(a, \frac{1}{a})$ отрезком. При каком значении a трапеция разбивается этим отрезком на две равно-
великие части?

5. Докажите, что $\int_2^3 \ln x dx < 2$.

Вариант 2

1. При каком $x > 0$ верно равенство $\int_1^x \frac{dy}{y} = \int_{2x}^{4x} \frac{dp}{p}$?

2. а) Найдите $\int \operatorname{tg} t dt$.

б) Найдите ту первообразную для функции $y = \operatorname{tg} t$, которая при $t = 0$ равна 0.

в) Нарисуйте график этой первообразной на $(0, 2\pi)$.

3. Найдите при $x > 0$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$.
4. Нарисуйте криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $[a, 1]$ (при $0 < a < 1$). Соедините точки $(a, 0)$ и $(1, 1)$ отрезком. При каком значении a трапеция разбивается этим отрезком на две равновеликие части?
5. Докажите, что $\int_4^5 \ln x dx < 2$.

Задание 10.8. Контрольное задание

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $y = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.
2. Криволинейная трапеция ограничена графиками функций $y = a^x$ и $y = \frac{a}{x}$ на промежутке $[0, 2]$, где $a > 1$.
 а) В каких границах лежит ее площадь?
 б) Где лежит большая по площади часть ее фигуры: слева или справа от прямой $x = 1$, когда $a = 2$?
3. Нарисуйте множество точек координатной плоскости, таких, что $\log_y \log_y x < \log_x \log_x y$.
4. Пусть $a > 0$. Верно ли неравенство $\frac{3^a - 1}{\ln 3} > \frac{2^a - 1}{\ln 2}$?
5. Нарисуйте график функции $y = |\log_a x|$ при $a > 1$. При каком значении a ветви графика образуют между собой прямой угол?
6. Найдите функцию $y(x)$, если точка $A(1, 2)$ принадлежит ее графику и отрезок касательной между точкой касания и осью X делится пополам в точке пересечения с осью Y .

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $y = \frac{\ln x + 1}{\ln^2 x}$.

2. Криволинейная трапеция ограничена графиками функций $y = a^{-x}$ и $y = -\frac{a}{x}$ на промежутке $[-2; 0]$, где $a < 1$.
 - а) В каких границах лежит ее площадь?
 - б) Где лежит большая по площади часть ее фигуры: слева или справа от прямой $x = -1$, когда $a = 2$?
3. Нарисуйте множество точек координатной плоскости таких, что $\log_y \log_x x > \log_x \log_y y$.
4. Пусть $a < 0$. Верно ли неравенство $\frac{3^a - 1}{\ln 3} < \frac{2^a - 1}{\ln 2}$?
5. Нарисуйте график функции $y = |\log_a x|$ при $a < 1$. При каком значении a ветви графика образуют между собой прямой угол?
6. Найдите функцию $y(x)$, если точка $A(1, -2)$ принадлежит ее графику и отрезок касательной между точкой касания и осью X делится пополам в точке пересечения с осью Y .

Тема 11

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Задание 11.1. Показательные уравнения

Вариант 1

1. Решите уравнение:
 - а) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;
 - б) $5 \cdot 25^{-\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{0,5 \sin 2x}$; в) $2^x - 4^x + 8^x = 1$.
2. Нарисуйте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$(y - x)\sqrt{x^2 + y^2 - 16} = 1.$$
3. Нарисуйте график зависимости числа корней уравнения от значений a : $100^{-x^2} - x^2 = a^2$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:
 - а) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - 0,5 \cdot 9^{x+1}$;
 - б) $9^{\cos^2 x} + 3^{\cos 2x} = 12 \cdot 9^{\sin x \cos x}$; в) $2^x + 4^x - 8^x = 1$.

2. Нарисуйте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$(x+y)\sqrt{4-x^2-y^2}=1.$$

3. Нарисуйте график зависимости числа корней уравнения от значений a : $10^{-|x|} - x^2 = a^2$.

Задание 11.2. Равносильность при решении показательных уравнений и неравенств

Вариант 1

1. Решите уравнение:

$$\text{а) } \sqrt{25^x - 1} = 5^x - 1; \quad \text{б) } |3^{t^2} - 3| = 3^{t^2} - 2 \cdot 3^t - 3.$$

2. Решите неравенство:

$$\text{а) } (z^2 + z + 1)^{\sqrt{z^2 + 2z}} \leq 1; \quad \text{б) } x^x > x^{x^2};$$

$$\text{в) } |4^x - 2^x| > 2^x - 1.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

$$\text{а) } \sqrt{1 - 36^x} = 1 - 6^x; \quad \text{б) } |2^{t^2} - 2| = 2^{t^2} - 2 \cdot 2^t - 2.$$

2. Решите неравенство:

$$\text{а) } (z^2 - z + 1)^{\sqrt{z^2 - 2z}} \geq 1; \quad \text{б) } x^x < x^{x^2};$$

$$\text{в) } |9^x - 3^x| < 1 - 3^x.$$

Задание 11.3. Показательные неравенства

Вариант 1

Решите неравенство.

- $(2^x - 1)^{-1} > (1 - 2^{x-1})^{-1}.$
- $(9^x - 3^{x+2})^{0.5} > 3^x - 9.$
- $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3.$
- $2^{\sin^2 x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos 2x}.$
- $\frac{5^{x+1}}{5^{2x} + 25} \geq 13 - 5y + 0,5y^2.$

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $(1 - 3^{x-1})^{-1} < (3^x - 1)^{-1}$.
2. $2^x - 4 < (4^x - 2^{x+2})^{0,5}$.
3. $(x^2 - x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 - x + 1)^3$.
4. $2^{\cos^2 x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\cos^2 x}$.
5. $\frac{6^{x+1}}{6^{2x} + 36} \geq 13 + 5y + \frac{1}{2}y^2$.

Задание 11.4. Системы уравнений

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y^{x^2-8x+12} = 1, \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} z^x = x, \\ z^y = y, \\ y^y = x. \end{cases}$$

2. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (1+x)^y + (1+y)^x = a, \\ 5^{x^2+2y^2} = 17^{xy} \end{cases} ?$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^y = y, \\ x^z = z, \\ z^z = y. \end{cases}$$

2. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (1+x)^x + (1+y)^y = a, \\ 6^{2x^2+y^2} = 16^{xy} \end{cases} ?$$

Задание 11.5. Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите положительный корень уравнения $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$.

2. Решите неравенство

$$4y^2 + 3 \cdot 3^{\sqrt{y}} + y \cdot 3^{\sqrt{y}} < 2y^2 \cdot 3^{\sqrt{y}} + 2y + 6.$$

3. На какой прямой лежат решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4? \end{cases}$$

4. При каком значении a имеет единственное решение уравнение $|x+2| - |2x+8| = a^x$?

5. Решите на промежутке $[0, \pi]$ неравенство

$$(a^{1+\sin x} - 1)^{-1} \geq (a^{\sin x} - 1)^{-1}.$$

Вариант 2

1. Найдите положительный корень уравнения $7^x \cdot 3^{\frac{3x+3}{x+2}} = 63$.

2. Решите неравенство

$$3y^2 \cdot 5^{\sqrt{y}} + 3y + 6 < 9y^2 + y \cdot 5^{\sqrt{y}} + 2 \cdot 5^{\sqrt{y}}.$$

3. На какой прямой лежат решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^{\sqrt{x}} = x, \\ x^{\sqrt{x}} = y^4? \end{cases}$$

4. При каком значении a имеет единственное решение уравнение $|x+1| - |2x+6| = a^x$?

5. Решите на промежутке $[0, \pi]$ неравенство

$$(a^{1+\sin x} - 1)^{-1} \leq (a^{\sin x} - 1)^{-1}.$$

Задание 11.6. Равносильность при решении логарифмических уравнений

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\log_{0,5}(x-1) = \log_{0,5}(x^2 - |x| - 3)$;

б) $\log_{|y-1|}(y^4 + 6y^2 + 9) = 4$;

в) $z^{\log_{\sqrt{z}} 2x} = 1$;

г) $\log_2(2^t + 1) \log_2(2^{t+1} + 2) = 2$.

2. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\log_x(-y) = \log_x y^2$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(-x-1) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - |x| - 3)$; б) $\log_{|y+1|}(y^4 + 6y^2 + 9) = 4$;

в) $\sqrt{z^{\log_3(x^2-1)}} = 1$; г) $\log_3(3^t + 2)\log_3(3^{t+1} + 6) = 2$.

2. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\log_x y = \log_x y^2$.

Задание 11.7. Равносильность при решении логарифмических неравенств

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $\log_{x^2+x+1}(x-2) > 0$; б) $0,5^{\log_3 \frac{3y+2}{2y+5}} \geq 1$;

в) $\log_t(2t) \leq \sqrt{\log_t(2t)^3}$.

2. При каких значениях a для любого x верно неравенство $\log_a(x^2 + 2) > 1$?

3. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\log_x(-y) > 1$.

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $\log_{x^2-x+1}(x+2) < 0$; б) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_3 \frac{3y-1}{2y+3}} \geq 1$;

в) $\log_t(3t) \leq \sqrt{\log_t(3t)^3}$.

2. При каких значениях a для любого x верно неравенство $\log_a(|x| + 3) < -1$?

3. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\log_{-x} y > 1$.

Задание 11.8. Логарифмические уравнения

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $2\lg(x+3) + \lg(x+5)^2 - \lg(x^2 + 8x + 7) = 5\lg 2$;

б) $3^{\log_y 9} \cdot y^{\log_3 y} = 9$;

в) $(\log_{|\cos z|} 16)(\log_{1+\cos 2z} 2) = (z^2)^{\log_2 2}$, если $2 \leq |z| \leq 4$.

2. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\lg x + \lg y = \lg \frac{x}{y}$.

3. При каком значении a имеет единственное решение уравнение $\lg(\sqrt{t^2 - a} + t) - \lg a = \lg(\sqrt{t^2 - a} - t)$?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $2\lg(x+1) + \lg(x+3)^2 - \lg(x^2 + 4x - 5) = 5\lg 2$;

б) $2^{\log_y 4} \cdot y^{\log_2 y} = 4$;

в) $(\log_{|\sin z|} 16)(\log_{1-\cos 2z} 2) = (z^2)^{\log_2 2}$, если $4 \leq |z| \leq 6$.

2. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\lg x - \lg y = \lg xy$.

3. При каком значении a имеет единственное решение уравнение $\lg(\sqrt{t^2 - a} - t) - \lg a = \lg(\sqrt{t^2 - a} + t)$?

Задание 11.9. Логарифмические неравенства

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $(\log_y(1+y^3))(\log_{y+1} y) > 2$; б) $\log_3 x > \log_9(x+1)$;

в) $(\log_x(3-x))(\log_{2x-1}(3-x)) < (\log_x(3-x))(\log_{5-2x}(3-x))$;

г) $\log_{\sin 2x} \cos x < \log_{\cos 2x} \sin x$.

2. При $x = 3$ неравенство $\log_a(x^2+1) < \log_a(x+1)$ верно. Найдите все значения x , при которых оно верно.

Вариант 2

1. Решите неравенство:

- а) $(\log_{y^2+1} y)(\log_y (y+1)) > 0,5$; б) $\log_2 x < \log_4 (x+1)$;
в) $(\log_{x-2} (5-x))(\log_{x-1} (5-x)) < (\log_{x-3} (5-x))(\log_{4-x} (5-x))$;
г) $\log_{\sin 2x} \cos x > \log_{\cos 2x} \sin x$.

2. При $x = -\frac{1}{3}$ неравенство $\log_a (x^2+1) < \log_{\sqrt{a}} (x+1)$ верно. Найдите все значения x , при которых оно верно.

Задание 11.10. Системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ 15^y = 3^x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_9 x^2 + \log_3 y^2 = 0, \\ x^2 - 9y^2 = 80; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_2 x} = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^y = z^{-1}, \\ y^z = x^{-1}, \\ z^x = y^{-1}. \end{cases}$

2. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$\begin{cases} \log_{2-x} (2-y) > 0, \\ \log_{4-y} (2x-2) > 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ 15^y = 5^x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_4 x^2 + \log_2 y^2 = 0, \\ x^2 - 4y^2 = 15; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 2, \\ xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^{-y} = z, \\ y^{-z} = x, \\ z^{-x} = y. \end{cases}$

2. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$\begin{cases} \log_{x-2}(2y-4) > 0, \\ \log_{3-y}(x-4) > 0. \end{cases}$$

Задание 11.11. Логарифмические уравнения с параметром

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $2\log_x a + \log_{ax} a = 0$; б) $x^{\log_a x} = a^2 x$.

2. Решите уравнение на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ при $a > 1$

$$(\log_a \sin x)^2 + \log_a \sin x - a = 0.$$

3. При каких значениях a имеет единственный корень уравнение $\log_a x = |x+1| + |x-5|$?

4. При каких значениях a не имеет решения уравнение

$$\log_{x^2-1}(x+a) = 1?$$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $2\log_x a + \log_{a^2 x} a = 0$; б) $x^{\log_a x} = \frac{a^2}{x}$.

2. Решите уравнение на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ при $a < 1$

$$(\log_a \cos x)^2 + \log_a \cos x - a = 0.$$

3. При каких значениях a имеет единственный корень уравнение $\log_a(-x) = |x-1| + |x+5|$?

4. При каких значениях a не имеет решения уравнение

$$\log_{1-x}(x^2 - a) = 1?$$

Задание 11.12. Логарифмические неравенства с параметром

Вариант 1

1. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\log_{2x+3}(y-2) < 1$.

2. Найдите целые решения неравенства при $a > 1$

$$\log_a((25 - x^2)^{0,5} - 1) \geq \log_a(|x| + 1).$$

3. При каких значениях a имеет решение неравенство

$$2\log_{0,5}a^2 - 3 + 2x\log_{0,5}a^2 - x^2 > 0?$$

4. При каких значениях a образуют один промежуток решения неравенства $\log_a(x^2 + 2x) < 1$?

5. При каких значениях a не имеет решений неравенство

$$\log_x(a - x) < 1?$$

Вариант 2

1. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\log_{2x+1}(y - 2) > 1$.

2. Найдите целые решения неравенства при $0 < a < 1$

$$\log_a((25 - x^2)^{0,5} - 1) \leq \log_a(|x| + 1).$$

3. При каких значениях a имеет решение неравенство

$$2\log_{0,5}a^2 + 3 - 2x\log_{0,5}a^2 + x^2 < 0?$$

4. При каких значениях a образуют один промежуток решения неравенства $\log_a(x^2 - 2x) < 1$?

5. При каких значениях a не имеет решений неравенство

$$\log_{-x}(a + x) < 1?$$

Задание 11.13. Контрольное задание

Вариант 1

1. Решите уравнение $\left(\frac{y}{2-y}\right)^{\log_2(2y+1) - \log_2(y^2-2)} = 1$.

2. Решите неравенство:

$$\text{а) } (9^x - 4 \cdot 3^x)^{0,5} \geq 3^x - 1; \quad \text{б) } |\log_{3^{-1}} z| > \sqrt{\left(\log_{3^{-1}} \frac{z}{9}\right)^2};$$

$$\text{в) } \log_{|t-1|}(8^t - 4^t) \geq \log_{|t-1|}(4^t - 1).$$

3. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $\sqrt{x + \log_2|x - 20|} = a^{x^2 - 20x + 64} + 5$?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\left(\frac{2-y}{y}\right)^{\log_4(2y) - \log_4(y^2-3)} = 1$.
2. Решите неравенство:
а) $(25^x - 4 \cdot 5^x)^{0.5} \geq 5^x - 1$;
б) $|\log_{2^{-1}} 0,25z| > \sqrt{(\log_{2^{-1}} z)^2}$;
в) $\log_{|t-1|}(9^t - 1) \leq \log_{|t-1|}(27^t - 9^t)$.
3. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $\sqrt{0,5(x-1)} + \log_3|x-12| = a^{x^2-12x+27} + 2$?

Задание 11.14. Контрольное задание

Вариант 1

1. Решите уравнение:
а) $\log_2(9 + 8\sin^2 x - 3\sin 2x) = 3 - \log_{0,5}(1 + \sin^4 x)$;
б) $2|\lg(10az)| \log_2 10 = (2\lg 10a - 1,5)(\lg z)^{-1} - \lg \sqrt{z}$ при $a < 1$.
2. а) При каких значениях a и b имеет ровно два решения уравнение $a \cdot 2^x + b = b \cdot 2^{-x} + a$?
б) Найдите эти решения.
3. Решите неравенство:
а) $\log_3 y + \log_{0,5} y > 1$; б) $\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1$.
4. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию
$$\sqrt{x}^{\log_{\sqrt{y}}(x+1)} + (x+1)^{\log_{y^2} x^2} \geq 2x^2.$$
5. При каких a имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} \sin(a-y) + 2\sin x = 0, \\ 2\log_{16}(a-y) + 4\log_{0,25} y = \log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{y^3}\right) + 3\log_{64} x? \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\log_2(9 + \cos 2x) + \log_{0,5}(1 + \sin^2 x \cos^2 x) = 3$;

б) $\log_{\sqrt{z}} a \left| \log_a \frac{z}{2} \right| = (\log_{a^2} 2) (\log_{\sqrt{z}} a^2) - \log_a \sqrt{z}$ при $a < 0,1$.

2. а) При каких значениях a и b имеет ровно два решения уравнение $a \cdot 3^x + b = b \cdot 3^{-x} + a$?

б) Найдите эти решения.

3. Решите неравенство:

а) $\log_2 y + \log_{\frac{1}{3}} y < 1$;

б) $\log_x \log_2(4^x - 2) \geq 1$.

4. В системе координат нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$\sqrt{y}^{\log_{\sqrt{x}}(y+1)} + (y+1)^{\log_{x^2} y^2} \leq 2y^2.$$

5. При каких a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} \sin(3a - 3y) + 3\sin x = 0, \\ 2\log_4(a - y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2 \sqrt{y} + 3\log_8(2x)? \end{cases}$$

Тема 12

Вещественные и комплексные числа

Задание 12.1. Вещественные числа

Вариант 1

1. Сравните числа $(0,1(2))^2$ и $0,1$.

2. Докажите, что число $2\sqrt[3]{3} + 1$ не является рациональным.

3. Является ли рациональным число $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$?

4. Пусть x и y — два вещественных числа. Известно, что $x \neq -y$, а числа $x + y$ и $x^3 + y^3$ — рациональные. Верно ли, что:

а) число xy — рациональное;

б) оба числа x и y — рациональные?

5. Дана геометрическая прогрессия: $a, a^2, a^3, \dots$ ($a \in \mathbb{Q}$). Может ли в ней быть конечное число рациональных членов?

Вариант 2

1. Сравните числа $(0,1(3))^2$ и $0,1(2)$.

2. Докажите, что число $0,5 \cdot \sqrt[3]{5} - 1$ не является рациональным.
3. Является ли рациональным число $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$?
4. Пусть x и y — два вещественных числа. Известно, что $x \neq y$, а числа $x - y$ и $x^3 - y^3$ — рациональные. Верно ли, что:
 - а) число xy — рациональное;
 - б) оба числа x и y — рациональные?
5. Дана геометрическая прогрессия: $a, a^2, a^3, \dots (a \in \mathbb{Q})$. Может ли в ней быть конечное число иррациональных членов?

Задание 12.2. Алгебраическая форма комплексного числа

Вариант 1

1. Вычислите:
 - а) $\frac{(1+i)^2 + (1+i)^3}{(1+i)^3 - (1-i)^2}$;
 - б) $1 + i^7 + i^{14} + \dots + i^{70}$;
 - в) $(3i-1)^5 - (3i+1)^5$;
 - г) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$;
 - д) $z_1^3 + z_2^3$, где z_1 и z_2 — корни уравнения $z^2 + z + 1 = 0$.
2. На множестве комплексных чисел решите уравнение

$$x^2 + |x| + 1 = 0.$$
3. Докажите, что существует такое комплексное число z , для которого

$$\bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} > 100.$$

Вариант 2

1. Вычислите:
 - а) $\frac{(1-i)^2 + (1+i)^3}{(1+i)^3 - (1+i)^2}$;
 - б) $1 - i^5 + i^{10} - i^{15} + \dots + i^{100}$;
 - в) $(2i-1)^5 - (2i+1)^5$;
 - г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$;
 - д) $z_1^3 + z_2^3$, где z_1 и z_2 — корни уравнения $z^2 - z + 1 = 0$.
2. На множестве комплексных чисел решите уравнение

$$x^2 - |x| + 1 = 0.$$

3. Докажите, что существует такое комплексное число z , для которого

$$\bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} < 100.$$

**Задание 12.3. Геометрическая форма
комплексного числа**

Вариант 1

1. Нарисуйте фигуру, образованную всеми точками, изображающими комплексные числа z , такие, что:
- а) $2 \leq |z + i| \leq 4$, $|\operatorname{Re} z| \geq \sqrt{3}$, $|\operatorname{Im} z| \leq 1$;
 - б) $z = 1 - 2z'$, $|z'| = 1$;
 - в) $z = z'(1 - i)$, $|\operatorname{Re} z'| + |\operatorname{Im} z'| \geq 1$.
2. Пусть $|z| = 1$. Рассмотрим три числа: $1, z, iz$.
- а) Докажите, что $|iz - 1| + |z - 1| \geq \sqrt{2}$.
 - б) При каких z $|iz - 1| = |z - 1| + 2$?
 - в) При каких z $|iz - 1| = |z - 1|$?
 - г) Найдите границы для $|iz - 1| + |z - 1| + |iz - z|$.

Вариант 2

1. Нарисуйте фигуру, образованную всеми точками, изображающими комплексные числа z , такие, что:
- а) $2 \leq |z + 1| \leq 4$, $|\operatorname{Im} z| \geq \sqrt{3}$, $|\operatorname{Re} z| \leq 1$;
 - б) $z = 1 + 2z'$, $|z'| = 1$;
 - в) $z = z'(1 + i)$, $|\operatorname{Re} z'| + |\operatorname{Im} z'| \leq 1$.
2. Пусть $|z| = 1$. Рассмотрим три числа: $-1, z, iz$.
- а) Докажите, что $|iz + 1| + |z + 1| \geq \sqrt{2}$.
 - б) При каких z $|iz + 1| = |z + 1| + 2$?
 - в) При каких z $|iz + 1| = |z + 1|$?
 - г) Найдите границы для $|iz + 1| + |z + 1| + |iz - z|$.

Задание 12.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Вариант 1

1. Вычислите:
 - а) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{150}}{(1 - i)^{1987}}$;
 - б) $1 + z + z^2 + \dots + z^{11}$, если $z = -0,5 - 0,5i\sqrt{3}$.
2. Запишите в тригонометрической форме число $z = -\operatorname{ctg} \alpha + i$ ($0 < \alpha < \pi$).
3. а) Решите уравнение $z^5 = -1$.
б) Нарисуйте z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 — последовательные решения этого уравнения.
в) Вычислите сумму всех решений этого уравнения.
г) Вычислите $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_4 + z_4 z_5 + z_5 z_1$.
4. Найдите такие z , модуль которых равен 1 и $\frac{(1 - i)(1 + z)}{(1 - z)(1 + i)} \leq 0$.
5. Пусть $u = \sin 1 + i \cos 1$, $v = \cos 1 - i \sin 1$.
 - а) Чему равен угол $\angle AOB$, где O — начало координат, A и B — точки, изображающие данные комплексные числа?
 - б) Вычислите $u^{10} + v^{10}$.
 - в) Сможете ли вы обобщить результаты, полученные в п. (а) и (б)?

Вариант 2

1. Вычислите:
 - а) $\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{150}}{(1 + i)^{1987}}$;
 - б) $1 - z + z^2 - \dots - z^{11}$, если $z = 0,5 - 0,5i\sqrt{3}$.
2. Запишите в тригонометрической форме число $z = \operatorname{ctg} \alpha - i$ ($0 < \alpha < \pi$).
3. а) Решите уравнение $z^5 = 1$.
б) Нарисуйте z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 — последовательные решения этого уравнения.
в) Вычислите сумму всех решений этого уравнения.
г) Вычислите $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_4 + z_4 z_5 + z_5 z_1$.

4. Найдите такие z , модуль которых равен 1 и $\frac{(z-i)(-1+i)}{(z+i)(1+i)} \geq 0$.
5. Пусть $u = \sin 2 + i \cos 2$, $v = \cos 2 - i \sin 2$.
- а) Чему равен угол AOB , где O — начало координат, A и B — точки, изображающие данные комплексные числа?
- б) Вычислите $u^{10} + v^{10}$.
- в) Сможете ли вы обобщить результаты, полученные в п. (а) и (б)?

Задание 12.5. Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите комплексные числа x и y , такие, что
- $$\begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 6, \\ (3+i)x + (3-i)y = 8. \end{cases}$$
2. Из всех комплексных чисел z , таких, что $|z - \sqrt{3} + i| \leq 1$, найдите (в алгебраической форме) то, у которого главный аргумент наименьший.
3. Запишите в тригонометрической форме число $z = a - ai$, где $a \in \mathbb{R}$.
4. Пусть $x = 0,5(-1 - i\sqrt{3})$, $y = 0,5(-1 + i\sqrt{3})$. Вычислите $x^{3n+2} - y^{3n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
5. Пусть комплексные числа z таковы, что $|z| = 1$, $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$. Пусть $z' = \frac{2-z}{z}$. Какую фигуру образуют все такие числа z' ?
6. Имеет ли при $a > 2$ решение уравнение $z + a|z+1| + i = 0$?

Вариант 2

1. Найдите комплексные числа x и y , такие, что
- $$\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$$
2. Из всех комплексных чисел z , таких, что $|z - \sqrt{3} - i| \leq 1$, найдите (в алгебраической форме) то, у которого главный аргумент наибольший.

3. Запишите в тригонометрической форме число $z = a + ai$, где $a \in \mathbb{R}$.
4. Пусть $x = 0,5(-1 - i\sqrt{3})$, $y = 0,5(-1 + i\sqrt{3})$. Вычислите $x^{3n+1} - y^{3n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$).
5. Пусть комплексные числа z таковы, что $|z| = 1$, $\frac{4\pi}{3} < \arg z < \frac{5\pi}{3}$. Пусть $z' = \frac{2+z}{z}$. Какую фигуру образуют все такие числа z' ?
6. Имеет ли при $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ решение уравнение $|z|^2 + 2iz + 2a(1+i) = 0$?

Тема 13

МНОГОЧЛЕНЫ

Задание 13.1. Действия с многочленами

Вариант 1

1. Разделите $P(a) = 1 + a^4 + a^3 + 2a$ на $Q(a) = 1 + a^2$. Пусть $R(a)$ — остаток при этом делении. Верно ли, что $R(1)$ — остаток от деления $P(1)$ на $Q(1)$?
2. Пусть $P(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1$. Существует ли многочлен, при делении на который $P(x)$ даст в частном $2x^2 + 3x + 2$, а в остатке — $4x - 5$?
3. Может ли сумма двух многочленов делиться на $x^2 + 1$, если ни один из них не делится на $x^2 + 1$?
4. Выражение $(1 + 2x - 4x^2)^{1976}$ можно записать как многочлен. Чему равна сумма всех коэффициентов этого многочлена при x в четной степени?

Вариант 2

1. Разделите $P(a) = 1 + a^4 - a^3 + 2a + a^2$ на $Q(a) = 1 + a^2$. Пусть $R(a)$ — остаток при этом делении. Верно ли, что $R(1)$ — остаток от деления $P(1)$ на $Q(1)$?
2. Пусть $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1$. Существует ли многочлен, при делении на который $P(x)$ даст в частном $2x^2 - 3x + 2$, а в остатке $4x + 3$?

3. Может ли сумма двух многочленов делиться на $x^2 - 2$, если ни один из них не делится на $x^2 - 2$?
4. Выражение $(1 - 7x + 5x^3)^{1976}$ можно записать как многочлен. Чему равна сумма всех коэффициентов этого многочлена при x в нечетной степени?

Задание 13.2. Делимость с остатком

Вариант 1

1. Пусть $P(x) = 3x^3 + x^2 - 3$.
 а) При каком вещественном значении a остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x - a)$ равен a ?
 б) Найдите частное, полученное в результате этого деления.
2. Есть ли такие натуральные и большие 1 значения n , при которых $(a^2 + a + 1)^n + (a^2 - a + 1)^n$ делится на $a^2 + 1$?
3. Многочлен $P(x)$ при делении на $x + 1$ дает в остатке 1, при делении на $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ дает в остатке многочлен, все коэффициенты которого равны. Какой остаток он дает при делении на $(x + 2)$?
4. Могут ли различные числа a, b, c быть корнями многочлена $x^3 - ax^2 + bx - c$?
5. Делится ли $(a + b + c)^5 - (b + c - a)^5 - (c + a - b)^5 - (a + b - c)^5$ на abc ?

Вариант 2

1. Пусть $P(x) = 3x^3 + x^2 + 3$.
 а) При каком вещественном значении a остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x + a)$ равен a ?
 б) Найдите частное, полученное в результате этого деления.
2. Есть ли такие натуральные и большие 1 значения n , при которых $(3a^2 + a - 1)^n - (a^2 + a + 1)^n$ делится на $a^2 - 1$?
3. Многочлен $P(x)$ при делении на $x + 1$ дает в остатке 1, при делении на $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$ дает в остатке многочлен, все коэффициенты которого равны. Какой остаток он дает при делении на $(x - 2)$?

4. Могут ли различные числа a , b , c быть корнями многочлена $x^3 - ax^2 - bx - c$?
5. Делится ли $(a+b+c)^7 - (b+c-a)^7 - (c+a-b)^7 - (a+b-c)^7$ на abc ?

Задание 13.3. Теорема Безу

Вариант 1

1. Найдите такое целое значение a , при котором остаток от деления многочлена $3x^2 + a^2x^2 - 4x + 2a$ на $3x - 2$ равен 10.
2. Докажите, что при натуральных m , делящихся на 3, $x^m - y^m$ делится на $x^3 - y^3$.
3. Верно ли такое утверждение: многочлен $ax^3 + x^2 - x - b$ делится на $x^2 + 1$ тогда и только тогда, когда $ab = 1$?

Вариант 2

1. Найдите такое целое значение a , при котором остаток от деления многочлена $3x^2 + a^2x^2 - 4x + 2a$ на $3x + 2$ равен 10.
2. Докажите, что при натуральных m , делящихся на 4, $x^m - y^m$ делится на $x^4 - y^4$.
3. Верно ли такое утверждение: многочлен $ax^3 + x^2 - bx - 1$ делится на $x^2 + 1$ тогда и только тогда, когда $ab = 1$?

Задание 13.4. Схема Горнера

Вариант 1

1. Разделите $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$ на $a + b$.
2. Найдите значение многочлена $x^5 + (1 + 2i)x^4 + (1 + 3i)x^2 + 7$ при $x = -2 + i$.
3. Делится ли многочлен $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ на $(x-1)^2$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$)?

Вариант 2

1. Разделите $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$ на $a - b$.
2. Найдите значение многочлена $x^5 + (1 - 2i)x^4 - (3 + i)x^2 + 7i$ при $x = -1 + 2i$.

3. Делится ли многочлен $(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1$ на $(x-1)^2$ ($n \in N, n > 1$)?

Задание 13.5. Теорема Виета

Вариант 1

1. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 - x + 1 = 0$. Пусть α и β — его корни.
а) Не решая уравнения, составьте квадратное уравнение с корнями α^3 и β^3 .
б) При каких значениях a корни составленного уравнения положительны?
2. Составьте уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $x^{1987} - 1 = 0$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$. Пусть α и β — его корни.
а) Не решая уравнения, составьте квадратное уравнение с корнями $\alpha^2\beta^{-1}$ и $\beta^2\alpha^{-1}$.
б) При каких значениях a корни составленного уравнения положительны?
2. Составьте уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $x^{1987} + 1 = 0$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = -6, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = -6. \end{cases}$$

Задание 13.6. Рациональные корни многочлена

Вариант 1

1. Найдите рациональные корни уравнения $2x^5 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.
2. Решите неравенство $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 6 \geq 0$.

3. Можно ли представить многочлен $(x-1)(x-2)(x-3)-1$ как произведение многочленов с целыми коэффициентами?
4. Найдите целые значения a , при которых дробь $\frac{x^4 - ax + 1}{2x^3 - a}$ будет сократимой.
5. Рассмотрим уравнение $x^3 + x - 3 = 0$.
 - а) Имеет ли оно вещественные корни?
 - б) Имеет ли оно рациональные корни?

Вариант 2

1. Найдите рациональные корни уравнения $2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.
2. Решите неравенство $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6 \leq 0$.
3. Можно ли представить многочлен $(x+1)(x+2)(x+3)-1$ как произведение многочленов с целыми коэффициентами?
4. Найдите целые значения a , при которых дробь $\frac{x^4 + ax + 1}{2x^3 + a}$ будет сократимой.
5. Рассмотрим уравнение $x^4 + x - 3 = 0$.
 - а) Имеет ли оно вещественные корни?
 - б) Имеет ли оно рациональные корни?

Задание 13.7. Комплексные корни многочлена

Вариант 1

1. Один из корней уравнения $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = 0$ равен $i - 2$. Найдите его остальные корни.
2. Решите уравнение:
 - а) $x^5 - i = 0$; б) $y^4 + y^2 + 1 = 0$;
 - в) $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$.
3. Найдите хотя бы два вещественных значения a , при которых уравнение $x^{13} + ax^3 + x + a = 0$ имеет единственный вещественный корень.

Вариант 2

1. Один из корней уравнения $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ равен $i + 1$. Найдите его остальные корни.

2. Решите уравнение:

а) $x^5 + i = 0$; б) $y^4 - y^2 + 1 = 0$; в) $(z - i)^5 = (z + i)^5$.

3. Найдите хотя бы два вещественных значения a , при которых уравнение $x^{13} + ax^3 + 2x - a = 0$ имеет единственный вещественный корень.

Задание 13.8. Контрольное задание

Вариант 1

1. Докажите, что многочлен делится на $(x - 2)(x - 3)$ тогда и только тогда, когда он делится на $x - 2$ и на $x - 3$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ xyz = -2. \end{cases}$$

3. а) Является ли i корнем уравнения

$$x^3 - (1 + i)x^2 + x - 1 - i = 0?$$

б) Найдите корни этого уравнения.

4. Существуют ли такие целые значения a , при которых многочлен

$$p(x) = 0,25ax^4 - 3ax^2 + 8x + 6$$

делится на $q(x) = 0,5x^2 - ax + 3$, а $p'(x)$ делится на $q'(x)$?

5. а) Пусть $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ — отличные от 1 корни уравнения $x^{11} - 1 = 0$. Чему равно произведение

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_{10})?$$

б) Обобщите полученный результат.

Вариант 2

1. Докажите, что многочлен делится на $(x + 2)(x + 3)$ тогда и только тогда, когда он делится на $x + 2$ и на $x + 3$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ xyz = 2. \end{cases}$$

3. а) Является ли $-i$ корнем уравнения

$$x^3 + (1 + i)x^2 + x + 1 + i = 0?$$

б) Найдите корни этого уравнения.

4. Существуют ли такие целые значения a , при которых многочлен

$$p(x) = 0,25ax^4 - 3ax^2 - 8x + 6$$

делится на $q(x) = 0,5x^2 + ax + 3$, а $p'(x)$ делится на $q'(x)$?

5. а) Пусть $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ — отличные от -1 корни уравнения $x^{11} + 1 = 0$. Чему равно произведение

$$(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot \dots \cdot (1 - x_{10})?$$

- б) Обобщите полученный результат.

Тема 14

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Задание 14.1. Уравнения первой степени с одним неизвестным

Вариант 1

- Рассмотрим уравнение $ax - a = 1$.
 - Решите его.
 - При каких значениях a оно имеет положительный корень?
 - При каких значениях a выполняется неравенство $|x| \leq 1$?
 - Нарисуйте график зависимости $x(a)$.
- Решите уравнение $a = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a(x-1)}$.
- Отрезок соединяет две точки на боковых сторонах равнобедренного треугольника и параллелен его основанию. Боковые стороны равны 1, основание равно a . Чему равна длина этого отрезка, если в полученную трапецию можно вписать окружность?

Вариант 2

- Рассмотрим уравнение $ax + a = -1$.
 - Решите его.
 - При каких значениях a оно имеет отрицательный корень?
 - При каких значениях a выполняется неравенство $|x| \geq 1$?
 - Нарисуйте график зависимости $x(a)$.
- Решите уравнение $\frac{a+3}{a+2} = \frac{2}{x} - \frac{5}{(a+2)x}$.

3. Отрезок соединяет две точки на боковых сторонах равнобедренного треугольника и параллелен его основанию. Боковые стороны равны a , основание равно 1. Чему равна длина этого отрезка, если в полученную трапецию можно вписать окружность?

**Задание 14.2. Неравенства первой степени
с одним неизвестным**

Вариант 1

1. Рассмотрим неравенство $ax - 1 < 0$.
а) Решите его.
б) При каких значениях a решением неравенства является $x = 2$?
в) При каких значениях a любое решение данного неравенства меньше 1?
г) При каких значениях a любое число, модуль которого меньше 1, является решением данного неравенства?
2. Решите неравенство $\frac{2y+1}{(a-1)y} - \frac{a+5}{a-1} > \frac{3}{y}$ при $a > 1$.
3. Решите неравенство $|x+5| < ax$ при $a \geq 0$.

Вариант 2

1. Рассмотрим неравенство $ax + 1 > 0$.
а) Решите его.
б) При каких значениях a решением неравенства является $x = -2$?
в) При каких значениях a любое решение данного неравенства меньше -1 ?
г) При каких значениях a любое число, модуль которого меньше 1, является решением данного неравенства?
2. Решите неравенство $\frac{2y-1}{(a-1)(y-1)} - \frac{a+5}{a-1} > \frac{3}{y-1}$ при $a > 1$.
3. Решите неравенство $|-x+5| > ax$ при $a \leq 0$.

**Задание 14.3. Линейные системы уравнений
с двумя неизвестными**

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - y = 2, \\ x + 4y = a. \end{cases}$$

2. Прямые заданы уравнениями $3x + 2ay = 1$ и $3(a-1)x - ay = 1$.
При каких значениях a они: а) пересекаются; б) совпадают;
в) параллельны?

3. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} |x| + y = a, \\ x - ay = -a? \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + ay = a^3, \\ ax + y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ x - y = -2, \\ 4x + y = a. \end{cases}$$

2. Прямые заданы уравнениями $2ax + 3y = 1$ и $ax + 3(1-a)y = -1$.
При каких значениях a они: а) пересекаются; б) совпадают;
в) параллельны?

3. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} |x| + y = a, \\ x + ay = a? \end{cases}$

**Задание 14.4. Линейные системы уравнений
с многими неизвестными**

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 4y + z - 5t = 2, \\ 4x - 7y - z - 8t = -5, \\ 10x - 18y + 2z - 23t = 3, \\ 2x - 3y + z - t = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

2. При каких значениях a не имеет решения система уравнений

$$\begin{cases} ax + y + z = a, \\ x + ay + z = a^2, \\ x + y + az = a^3? \end{cases}$$

3. При каких значениях k имеет единственное решение система уравнений

$$x + y + z = 4x + 2y + z = 4x + 5y + 2z = 5x + 5y + 4z = k?$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = -2, \\ 3x + y + 2z + 4t = 1, \\ 4x + 6y + 3z + 7t = 1, \\ 5x + 2y + 5z + 4t = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

2. При каких значениях a не имеет решения система уравнений

$$\begin{cases} -ax + y + z = -a, \\ x - ay + z = a^2, \\ x + y - az = -a^3? \end{cases}$$

3. При каких значениях k имеет единственное решение система уравнений

$$x + y + z = 3x + 2y + z = 3x + 4y + 2z = 4x + 4y + 5z = k?$$

Задание 14.5. Системы неравенств с несколькими неизвестными

Вариант 1

1. На координатной плоскости нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\text{а) } \begin{cases} -x + 3y \geq 3, \\ 4x - y \leq 2, \\ x^2 < 4, \\ y^2 > 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |x|^{|y|} \geq 1, \\ \log_x y \leq 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sin(x + y) > 0, \\ \cos(x - y) < 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \arcsin x < \arccos y, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

2. Плоскость α задана уравнением $x - y + z - 1 = 0$. Плоскость β задана уравнением $x + y - z + 1 = 0$. Какими неравенствами задается меньший из двугранных углов, образованных этими плоскостями?

Вариант 2

1. На координатной плоскости нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - y \geq 3, \\ -x + 4y \leq 2, \\ x^2 > 9, \\ y^2 < 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |x|^{1/y} \leq 1, \\ \log_x y \geq 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sin(x - y) < 0, \\ \cos(x + y) > 0; \end{cases}$$

г) $\arcsin y < \arccos x$, $x > 0$, $y > 0$.

2. Плоскость α задана уравнением $-x + y + z - 1 = 0$. Плоскость β задана уравнением $-x - y - z + 1 = 0$. Какими неравенствами задается меньший из двугранных углов, образованных этими плоскостями?

Задание 14.6. Метод интервалов

Вариант 1

1. Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{(1 - x^2)(x - 1)^2(x + 1)^3}{x^6 + x^4 + x^2} \leq 0; \quad \text{б) } a^4 + |a| - 1 \geq 1;$$
$$\text{в) } \begin{cases} (2z + 4)^{-1} < (z - 3)^{-1}, \\ z^2 \leq 8. \end{cases}$$

2. Найдите область определения функции $\sqrt{\frac{t^5 + t^2}{-2t^2 - t + 1}}$.

3. Нарисуйте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\frac{x^2 - 5x + 6}{y^2 - 5y + 6} > 0$.

Вариант 2

1. Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{(-1 + x^2)(1 - x)^2(x + 1)^3}{x^8 - x^6 + x^4} \leq 0; \quad \text{б) } a^4 + 2|a| + 1 < 4;$$
$$\text{в) } \begin{cases} (2z + 6)^{-1} > (z - 2)^{-1}, \\ z^2 \geq 12. \end{cases}$$

2. Найдите область определения функции $\sqrt{\frac{-t^5 + t^2}{-2t^2 + t + 1}}$.
3. Нарисуйте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\frac{x^2 - 7x + 12}{y^2 - 7y + 12} < 0$.

Задание 14.7. Квадратные уравнения с параметром

Вариант 1

1. а) Чему равна сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$?
- б) Нарисуйте график этой суммы.
2. При каких целых значениях a имеет единственное решение уравнение $ax^2 - (a+1)x + a^2 + a = 0$?
3. При каких значениях a имеет решение система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + ax + 8 = 0, \\ x^2 + x + a = 0? \end{cases}$$
4. Решите уравнение $\frac{ax + 1}{x(x + a)} = -1$.
5. При каких значениях a корни уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$ удовлетворяют условию $|x| \leq 1$?

Вариант 2

1. а) Чему равна сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$?
- б) Нарисуйте график этой суммы.
2. При каких целых значениях a имеет единственное решение уравнение $ax^2 + (a+1)x + a^2 + a = 0$?
3. При каких значениях a имеет решение система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 - ax + 8 = 0, \\ x^2 - x + a = 0? \end{cases}$$
4. Решите уравнение $\frac{ax - 1}{x(a - x)} = -1$.

5. При каких значениях a корни уравнения $ax^2 - x + 1 = 0$ удовлетворяют условию $|x| \geq 1$?

Задание 14.8. Квадратные неравенства с параметром

Вариант 1

1. При каких значениях a неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ верно для всех значений x ?
2. Решите неравенство $ax^2 + x + 1 \geq 0$.
3. При каких значениях a решения неравенства $|x^2 - a| > x$ образуют один промежуток?
4. При каких значениях a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет только отрицательные решения?
5. При каких значениях a любое решение неравенства $az^2 + (1 - a^2)z - a > 0$ удовлетворяет условию $|z| < 2$?

Вариант 2

1. При каких значениях a неравенство $(a^2 - 1)x^2 - 2(a - 1)x + 2 < 0$ верно для всех значений x ?
2. Решите неравенство $ax^2 - x + 1 \geq 0$.
3. При каких значениях a решения неравенства $|x^2 - a| > -x$ образуют один промежуток?
4. При каких значениях a неравенство $3 - |x + a| > x^2$ имеет только положительные решения?
5. При каких значениях a любое решение неравенства $|z| \geq 7$ является решением неравенства $az^2 - 2(a^2 - 3)z - 12a \geq 0$?

Задание 14.9. Уравнения с модулями

Вариант 1

1. Решите уравнение:
а) $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 2$; б) $x^2 - |x| = 6$;
в) $|x - |1 - x|| - x = -1$.

2. Какое число является решением уравнения

$$(|x+3|) - (a|x-1|) = 4$$

при всех значениях a ?

3. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $|1 - ax| = x$?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $|x| + |x+1| + |x+2| = 2$; б) $x^2 + |x| = 6$;

в) $|x + |1 - x|| - x = 1$.

2. Какое число является решением уравнения

$$(|x-2|) + (a|x+3|) = 5$$

при всех значениях a ?

3. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $|1 + ax| = -x$?

Задание 14.10. Неравенства с модулями

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| > 1$. 2. $|z^2 - z - 2| < z$ ($z \in \mathbb{N}$). 3. $|y^3 - y| \geq 1 - y$.

4. $|t| < \frac{a}{t}$. 5. $|x - a| + |x - 1| \geq |1 - a|$.

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 1$. 2. $|z^2 + z - 2| < z$ ($z \in \mathbb{N}$). 3. $|-y^3 + y| \geq 1 + y$.

4. $|t| > \frac{a}{t}$. 5. $|x + a| + |x + 1| \geq |a - 1|$.

Задание 14.11. Иррациональные уравнения

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $x - \sqrt{x-7} = 13$;

б) $\sqrt{y^5 - y + 1} = \sqrt{1 - 2y^5}$;

в) $\left| (2z + 5)^{0,5} - (2z + 16)^{0,5} \right| = 1$;

г) $(1 + t(t^2 - 24)^{0,5})^{0,5} = t - 1$.

2. При каких значениях a имеет решение уравнение

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 3} = a?$$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+5} - x = -1$;

б) $\sqrt{y^7 - y + 1} = \sqrt{1 - 2y^7}$;

в) $\left| (0,5z - 1)^{0,5} - (0,5z - 5)^{0,5} \right| = 2$;

г) $(1 + t(t^2 - 16)^{0,5})^{0,5} = t - 1$.

2. При каких значениях a имеет решение уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 4} = a?$$

Задание 14.12. Иррациональные неравенства

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $\sqrt{x+2} > x$.

2. $(y^2 - 3y - 10)^{0,5} \leq 8 - y$.

3. $|z - 1|^{0,25} \leq (z^{0,5} - 1)^{0,25}$

4. $\sqrt{3-t} - \sqrt{t+1} > 0,5$.

5. $\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 + a + 2} + \sqrt{a^2 + a + 3} \geq 3,5$.

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $\sqrt{x+1} > x-1$.

2. $(y^2 - 5y - 6)^{0,5} \leq 9 - y$.

3. $|z - 1|^{0,25} \leq (1 - z^{0,5})^{0,25}$

4. $\sqrt{2-t} - \sqrt{t+2} > 0,5$.

5. $\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 2} + \sqrt{a^2 - a + 3} \geq 3,5$.

**Задание 14.13. Иррациональные уравнения
с параметром**

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-a} = a$;

б) $\sqrt{1-x^2} = x+a$.

2. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $\sqrt{ax} = x+1$ ($a \geq 0$)?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+a} = -a$;

б) $\sqrt{1-x^2} = x-a$.

2. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $\sqrt{ax} = -x+1$ ($a \leq 0$)?

**Задание 14.14. Иррациональные неравенства
с параметром**

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2+a^2} > x+a$;

б) $\sqrt{x-a^2} + \sqrt{x} > 2a$.

2. При каких значениях a не имеет решения неравенство $\sqrt{a^2-x^2} > x+1$?

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2+a^2} > x-a$;

б) $\sqrt{x-a^2} + \sqrt{x} > -2a$.

2. При каких значениях a не имеет решения неравенство $\sqrt{a^2-x^2} > -x+1$?

Задание 14.15. Нелинейные системы уравнений

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x^3 - x^2y = 1, \\ y^3 - xy^2 = 2; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} \sqrt{-x} + \sqrt{y} + \sqrt{-xy} = 11, \\ -x\sqrt{y} + y\sqrt{-x} = 30; \end{cases} \\ & \begin{cases} \frac{xyz}{x+y-z} = 1, \\ \frac{xyz}{y+z-x} = 2, \\ \frac{xyz}{z+x-y} = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

2. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = a? \end{cases}$

3. Верно ли, что при любом значении a имеет положительные решения система уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = a - 1, \\ y^2 - 2xy = a^2? \end{cases}$

(Положительные решения означают, что $x > 0$ и $y > 0$.)

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x^3 - x^2y = 2, \\ y^3 - xy^2 = 1; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{-y} + \sqrt{-xy} = 5, \\ x\sqrt{-y} - y\sqrt{x} = 6; \end{cases} \\ & \begin{cases} \frac{xyz}{x+y-z} = 3, \\ \frac{xyz}{y+z-x} = 2, \\ \frac{xyz}{z+x-y} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x - y = a? \end{cases}$

3. Верно ли, что при любом значении a имеет положительные решения система уравнений $\begin{cases} -x^2 + y^2 = a + 1, \\ x^2 - 2xy = a^2? \end{cases}$

(Положительные решения означают, что $x > 0$ и $y > 0$.)

Задание 14.16. Контрольное задание

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $x = \frac{a + x^2}{a(x-2)} \quad (a > 0);$

б) $y^2 - 3y - \sqrt{2y^2 - 6y + 5} = -3.$

2. Решите систему:

а) $\begin{cases} |z^2 + |2z - 1| - 1| = 2 - z^2, \\ (z^4 - 1)^{0.5} < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = (x+1)^2, \\ yz = (y+1)^2, \\ xz = (z+1)^2, \\ xyz \geq 0. \end{cases}$

3. При каких значениях a для любого x верно неравенство

$$\frac{ax^2 + ax - 1}{(a^2 + 1)x^2 + x + 1} < 0?$$

4. При каком значении b не имеет решения уравнение

$$\sqrt{5+x} = b - x?$$

5. При каком значении c имеет единственное решение система уравнений $x^2 - 4x + 4 = 1 - y^2 = y - |c|?$

6. Нарисуйте в системе координат множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $1 < |\sqrt{y} - x| < 2.$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $x = \frac{a + x^2}{a(x+2)} \quad (a > 0);$

б) $y^2 + 3y - \sqrt{2y^2 + 6y + 5} = -3.$

2. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \left| z^2 + |2z + 1| - 1 \right| = 2 - z^2, \\ (z^4 - 1)^{0.5} < 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} xz = (x + 1)^2, \\ xy = (y + 1)^2, \\ yz = (z + 1)^2, \\ xyz \geq 0. \end{cases}$$

3. При каких значениях a для любого x верно неравенство

$$\frac{ax^2 - ax - 1}{(a^2 + 1)x^2 - x + 1} < 0?$$

4. При каком значении b не имеет решения уравнение

$$\sqrt{5 - x} = x - b?$$

5. При каком значении c имеет единственное решение система уравнений $x^2 - 6x + 9 = 1 - y^2 = y - |c|$?

6. Нарисуйте в системе координат множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $1 < |\sqrt{y} + x| < 2$.

Тема 15

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Задание 15.1. Общие свойства последовательностей

Вариант 1

1. Исследуйте на ограниченность последовательность (a_n) , если

$$a_n = \frac{2n + 3}{n}.$$

2. Найдите условия для a и b , такие, что последовательность (x_n) , где $x_n = an^2 + bn + c$, строго возрастает.

3. Пусть $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = 0,5(a_{n-1} + a_{n+1})$. Найдите формулу общего члена последовательности (a_n) .

4. Найдите наибольший член последовательности (x_n) , где $x_n = \frac{1000n}{n^2 + 1}$.

5. В прямой угол вписана окружность радиуса $r_1 = 1$. Затем в него вписана меньшая окружность, касающаяся первой окружности. Каждая следующая окружность касается сторон угла и предыдущей окружности. Чему равен радиус n -й окружности?

Вариант 2

1. Исследуйте на ограниченность последовательность (a_n) , если
$$a_n = \frac{2n-3}{n}.$$
2. Найдите условия для a и b , такие, что последовательность (x_n) , где $x_n = an^2 + bn + c$, строго убывает.
3. Пусть $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Найдите формулу общего члена последовательности (a_n) .
4. Найдите наименьший член последовательности (x_n) , где
$$x_n = \frac{n^2+1}{1000n}.$$
5. В прямой угол вписана окружность радиуса $r_1 = 1$. Затем в него вписана большая окружность, касающаяся первой окружности. Каждая следующая окружность касается сторон угла и предыдущей окружности. Чему равен радиус n -й окружности?

Задание 15.2. Предел последовательности

Вариант 1

1. Вычислите:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n!}}{n}.$$

2. Имеет ли предел последовательность:

$$\text{а) } 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots;$$

$$\text{б) } a_n = 1 + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^n+n}?$$

3. Ограничена ли последовательность (x_n) , если

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}?$$

Вариант 2

1. Вычислите:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+3^2+\dots+3^n}{1+5+5^2+\dots+5^n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n - \frac{1}{n!}}{n}.$$

2. Имеет ли предел последовательность:

а) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, \dots$;

б) $a_n = 1 + \frac{1}{3^2 + 2} + \frac{1}{3^3 + 3} + \dots + \frac{1}{3^n + n}$?

3. Ограничена ли последовательность (x_n) , если

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{1}{x_n}?$$

Задание 15.3. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия

Вариант 1

1. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}}{-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{3^{n-1}}}$.

2. При каких значениях a выполняется неравенство

$$\sqrt[k]{a \sqrt[k]{a \sqrt[k]{a \dots}}} > 1?$$

3. Пусть (a_n) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна S . Может ли сумма последовательности (a_n^2) равняться S^2 ?

4. Последовательность квадратов образована так: каждый квадрат, начиная со второго, имеет вершины в серединах сторон предыдущего квадрата. Сторона исходного квадрата равна 1. Вычислите предел последовательности сумм:
а) периметров; б) площадей этих квадратов.

5. Может ли каждый член бесконечной геометрической прогрессии быть в k раз меньше суммы членов, следующих за ним?

Вариант 2

1. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}}$.

2. При каких значениях a выполняется неравенство

$$\sqrt[k]{a \sqrt[k]{a \sqrt[k]{a \dots}}} < 1?$$

3. Пусть (a_n) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна S . Может ли сумма последовательности $(\sqrt{a_n})$ равняться $\sqrt{S}$?
4. Последовательность равнобедренных треугольников образована так: каждый равнобедренный треугольник, начиная со второго, имеет вершины в серединах сторон предыдущего треугольника. Сторона исходного треугольника равна 1. Вычислите предел последовательности сумм: а) периметров; б) площадей этих треугольников.
5. Может ли каждый член бесконечной геометрической прогрессии быть в k раз больше суммы членов, следующих за ним?

Задание 15.4. Числовые ряды

Вариант 1

Сходится ли ряд?

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{1-7n}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} 0,5 \cdot 10^{-n} - 9^{-n} - 8^{-n}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$.
- $1 + 0 + 2^{-0,5} + 0 + 0 + 3^{-0,5} + 0 + 0 + 0 + 4^{-0,5} + \dots$.

Вариант 2

Сходится ли ряд?

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-4n}{10n+7}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} -3 \cdot 100^{-n} + 99^{-n} - 88^{-n}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{50^n}{n!}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^3}$.
- $1 + 0 + 2^{-\frac{1}{2}} + 0 + 0 + 3^{-\frac{1}{2}} + 0 + 0 + 0 + 4^{-\frac{1}{2}} + \dots$.

Задание 15.5. Контрольное задание

Вариант 1

- Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right)$.

2. Пусть $a_n = \frac{3n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$. а) Ограничена ли (a_n) ? б) Монотонна ли (a_n) ? в) Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
3. Пусть (a_n) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с суммой S_1 и знаменателем q . Докажите, что (a_n^3) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия. Обозначим ее сумму S_2 . Верно ли, что:
 а) при любом a_1 и любом q $S_1 > S_2$;
 б) при любом q найдется a_1 , такое, что $S_1 > S_2$;
 в) найдутся такие q и a_1 , что $S_1 > S_2$;
 г) при любом a_1 найдется q , такое, что $S_1 > S_2$?
4. На одной стороне угла берется точка A_1 . Из нее проводится перпендикуляр A_1A_2 к другой стороне угла. Из точки A_2 проводится перпендикуляр A_2A_3 к первой стороне угла. Этот процесс идет бесконечно. Вычислите длину полученной бесконечной ломаной, если расстояние от A_1 до вершины угла равно 1, а величина угла равна 30° .

5. Вычислите предел последовательности

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

Вариант 2

1. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right)$.
2. Пусть $a_n = \frac{4n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$. а) Ограничена ли (a_n) ? б) Монотонна ли (a_n) ? в) Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
3. Пусть (a_n) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с суммой S_1 и знаменателем q . Докажите, что (a_n^2) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия. Обозначим ее сумму S_2 . Верно ли, что:
 а) при любом a_1 и любом q $S_1 > S_2$;
 б) при любом q найдется a_1 , такое, что $S_1 > S_2$;
 в) найдутся такие q и a_1 , что $S_1 > S_2$;
 г) при любом a_1 найдется q , такое, что $S_1 > S_2$?

4. На одной стороне угла берется точка A_1 . Из нее проводится перпендикуляр A_1A_2 к другой стороне угла. Из точки A_2 проводится перпендикуляр A_2A_3 к первой стороне угла. Этот процесс идет бесконечно. Вычислите длину полученной бесконечной ломаной, если расстояние от A_1 до вершины угла равно 1, а величина угла равна 60° .
5. Вычислите предел последовательности

$$\sqrt{3}, \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}, \dots$$

Тема 16

ЭЛЕМЕНТЫ КОНЕЧНОЙ МАТЕМАТИКИ

Задание 16.1. Множества

Вариант 1

- Каждый взрослый житель города говорит хотя бы на одном из трех языков: французском, или немецком, или итальянском. 80% жителей говорят на французском языке, 70% жителей говорят на немецком языке, 60% жителей говорят на итальянском языке, 10% жителей говорят на трех языках. Сколько процентов от всего взрослого населения города составляет число жителей, которые говорят на двух языках?
- Пусть A, B, C — различные непустые множества. $A \subset B$, $A \subset C$, $(B \cap C) \subset A$. Верно ли, что $A = B \cap C$?
- Придумайте такие различные непустые множества A, B, C, X , что $B \subset A \subset C$, $A \cap X = B$, $A \cup X = C$.
- Существуют ли такие различные непустые множества A, B, C , что $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup B$?
- Пусть известно, что: а) если рак вареный и красный, то он мертвый; б) если рак красный и мертвый, то он вареный. Следует ли из этого, что вареный и мертвый рак — красный?

Вариант 2

- Каждый взрослый житель города говорит хотя бы на одном из трех языков: французском, или немецком, или итальянском. 80% жителей говорят на французском языке, 70% жителей говорят на немецком языке, 60% жителей гово-

рят на итальянском языке, 40% жителей говорят на двух языках. Сколько процентов от всего взрослого населения города составляет число жителей, которые говорят на трех языках?

2. Пусть A, B, C — различные непустые множества. $B \subset A$, $C \subset A$, $A \subset (B \cup C)$. Верно ли, что $A = B \cup C$?
3. Придумайте такие различные непустые множества A, B, C, X , что $B \subset A \subset C$, $C \cap X = A \cup B$, $B \cup X = C \cap A$.
4. Существуют ли такие различные непустые множества A, B, C , что $(A \cup B) \cap C = (B \cap C) \cup A$?
5. Пусть известно, что: а) если рак вареный или красный, то он мертвый; б) если рак красный или мертвый, то он вареный. Следует ли из этого, что вареный или мертвый рак — красный?

Задание 16.2. Формула числа сочетаний

Вариант 1

1. а) Сравните $C_{201}^{100} \cdot C_{199}^{100}$ и $(C_{200}^{100})^2$.
б) Обобщите полученный результат.
2. Решите уравнение $\frac{C_x^3 + C_x^4}{C_{x+1}^2} = 11$.
3. Сколько решений имеет неравенство $10 \leq C_x^y \leq 15$?
4. Будет ли натуральным число $\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$?
5. Докажите, что $\sum_{i=0}^k C_{n+i}^i = C_{n+k+1}^k$.

Вариант 2

1. а) Сравните $C_{101}^{50} \cdot C_{99}^{50}$ и $(C_{100}^{50})^2$.
б) Обобщите полученный результат.
2. Решите уравнение $\frac{C_{x+1}^5 - C_x^5}{C_x^2} = 11$.
3. Сколько решений имеет неравенство $15 \leq C_x^y \leq 20$?

4. Будет ли натуральным число $\frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}$?
5. Докажите, что $\sum_{i=0}^k C_{n+i}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$.

Задание 16.3. Комбинаторные задачи. Сочетания

Вариант 1

1. Имеется 10 красных, 21 синий и 40 зеленых шаров, причем шары одного цвета различны. Некто X может выбрать 5 красных, 10 синих и 20 зеленых шаров. Некто Y может выбрать 5 красных, 11 синих и 16 зеленых шаров. У кого из них больше возможностей?
2. Из 10 юношей и 10 девушек выбирается команда в 5 человек. Сколько команд можно выбрать так, чтобы в них было: а) не больше двух девушек; б) больше двух девушек?
3. В классе 35 человек, причем только одна Ольга, один Саша и один Женя. Сколькими способами можно выбрать делегацию из 5 учеников этого класса, если всем известно, что введя в состав делегации Ольгу, нельзя в нее одновременно включать Сашу и Женю?
4. Семейство параллельных между собой прямых пересекается другим семейством параллельных между собой прямых. В каждом семействе k прямых. При каких значениях k получится на рисунке больше 100 параллелограммов?

Вариант 2

1. Имеется 10 красных, 21 синий и 40 зеленых шаров, причем шары одного цвета различны. Некто X может выбрать 6 красных, 8 синих и 20 зеленых шаров. Некто Y может выбрать 4 красных, 11 синих и 20 зеленых шаров. У кого из них больше возможностей?
2. Из 12 юношей и 12 девушек выбирается команда в 5 человек. Сколько команд можно выбрать так, чтобы в них было: а) не больше двух юношей; б) больше двух юношей?
3. В классе 35 человек, причем только одна Галя, один Федя и один Вася. Сколькими способами можно выбрать делегацию из 5 учеников этого класса, если всем известно, что

введя в состав делегации Галю, необходимо ввести и Васю, и Федю?

4. Семейство параллельных между собой прямых пересекается другим семейством параллельных между собой прямых. В каждом семействе k прямых. При каких значениях k получится на рисунке меньше 100 параллелограммов?

Задание 16.4. Бином

Вариант 1

1. Имеется бином $(1 + \sqrt{2})^{60}$.
а) Каких слагаемых: рациональных или иррациональных — больше в его разложении?
б) Найдите наибольший член этого разложения.
2. При каких натуральных значениях n число $7^{2n} - 1$ делится на 50?
3. Рассмотрим выражение $(1 + 2x - 3y)^{1000}$. После возведения в степень и приведения подобных получается многочлен. Чему равна сумма всех его коэффициентов?
4. Докажите, что $\sum_{i=0}^n C_n^i \cdot 2^{n-i} = 3^n$.
5. Найдите коэффициент при x^6 в разложении выражения $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$.

Вариант 2

1. Имеется бином $(1 + \sqrt{3})^{60}$.
а) Каких слагаемых: рациональных или иррациональных — больше в его разложении?
б) Найдите наибольший член этого разложения.
2. При каких натуральных значениях n число $6^{2n} - 1$ делится на 37?
3. Рассмотрим выражение $(3a - 2b - 1)^{500}$. После возведения в степень и приведения подобных получается многочлен. Чему равна сумма всех его коэффициентов?

4. Докажите, что $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \cdot 2^{n-i} = 1$.

5. Найдите коэффициент при x^4 в разложении выражения $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$.

Задание 16.5. Формулы комбинаторики

Вариант 1

1. Решите уравнение $A_n^z = xA_n^{x-1}$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} A_{xy}^2 = 20, \\ A_{x+1}^2 - A_{y+1}^2 = 18. \end{cases}$$

3. Докажите или опровергните неравенство

$$\frac{(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1})P_{k-1}}{A_n^{k-1}} \geq \frac{1}{n}.$$

4. а) Решите неравенство $A_{100}^z - C_{100}^z \geq P_z$.

б) Можно ли его обобщить?

5. Решите уравнение $A_m^n = 210$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $A_{n+1}^x = xA_{n+1}^{x-1}$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} A_{xy}^2 = 42, \\ A_{x+2}^2 - A_{y+2}^2 = 12. \end{cases}$$

3. Докажите или опровергните неравенство

$$\frac{(C_n^{k+1} + C_n^k)P_k}{A_{n+1}^k} \geq \frac{1}{n+1}.$$

4. а) Решите неравенство $A_{90}^z - C_{90}^z \geq P_z$.

б) Можно ли его обобщить?

5. Решите уравнение $A_m^n = 6$.

Задание 16.6. Комбинаторные задачи

Вариант 1

1. Сколькими способами можно разложить 100 различных книг на 10 полках?

2. а) Сколько различных пятизначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 5, используя каждую цифру только один раз?
 б) Какой будет результат, если не накладывать ограничения на использование цифр?
3. Сколько различных «слов» (буквенных наборов) из 7 букв можно составить из слова «колобок»?
4. В списке выступающих 6 человек. Сколько возможно таких регламентов, когда X выступает после Y , но раньше Z ?
5. Никакие три диагонали выпуклого многоугольника не пересекаются в одной точке. Всего точек пересечения диагоналей оказалось 495. Сколько сторон в этом многоугольнике?

Вариант 2

1. Сколькими способами можно разложить 10 различных книг на 100 полках?
2. а) Сколько различных четных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 5, используя каждую цифру только один раз?
 б) Какой будет результат, если не накладывать ограничения на использование цифр?
3. Сколько различных «слов» (буквенных наборов) из 7 букв можно составить из слова «барабан»?
4. В списке выступающих 6 человек. Сколько возможно таких регламентов, когда X выступает после Y и Z ?
5. Никакие три диагонали выпуклого многоугольника не пересекаются в одной точке. Всего точек пересечения диагоналей оказалось 210. Сколько сторон в этом многоугольнике?

Задание 16.7. Подсчет вероятностей

Вариант 1

1. В ящике лежит n шаров, пронумерованных от 1 до n . Какова вероятность того, что при последовательном вытаскивании всех шаров их номера будут возрастать?
2. Из 28 костей домино берется одна. Какова вероятность того, что будет взят дубль или кость с суммой очков, не меньшей 10?

3. Компания из 10 человек усаживается за стол как попало. Среди них один Федя и один Вася. Какова вероятность того, что они окажутся рядом?
4. Взяты два числа x и y . Сумма их квадратов не больше 1. Какова вероятность того, что их сумма по модулю не превосходит 1?
5. В лотерее 1000 билетов. Когда вероятнее выигрыш хотя бы на один билет: когда выигрышных билетов 100 и куплено 20 или когда выигрышных билетов 20 и куплено 100?

Вариант 2

1. В ящике лежит n шаров, пронумерованных от 1 до n . Какова вероятность того, что при последовательном вытаскивании всех шаров их номера будут убывать?
2. Из 28 костей домино берется одна. Какова вероятность того, что будет взят дубль или кость с суммой очков, не большей 2?
3. Компания из 8 человек усаживается за стол как попало. Среди них один Федя и один Вася. Какова вероятность того, что они не окажутся рядом?
4. Взяты два числа x и y . Сумма их квадратов не больше 1. Какова вероятность того, что их разность по модулю не превосходит 1?
5. В лотерее 1000 билетов. Когда вероятнее выигрыш хотя бы на один билет: когда выигрышных билетов 10 и куплено 5 или когда выигрышных билетов 5 и куплено 10?

Задание 16.8. Контрольное задание

Вариант 1

1. A, B, X — три различных непустых множества. Может ли быть, что $A \cap X = B \cup X$ и $A \cup X = B \cap X$?
2. Решите неравенство $\frac{1}{C_5^x} - \frac{1}{C_6^x} > \frac{7}{10 C_7^x}$.
3. Имеется бином $(1 - x^2)^5$. При каких значениях x модуль четвертого члена разложения не меньше модуля третьего члена разложения?

4. Чему равна сумма $\sum_{i=0}^{10} 10^i C_{10}^i$?
5. Сколько нечетных чисел, меньших 10^4 , можно составить из цифр 4, 6, 7?
6. Имеется 100 белых и 50 черных шаров. Сколькими способами их можно выложить в ряд, чтобы два черных шара не лежали рядом?
7. Два шахматиста одинакового уровня играют без учета ничьих. Что вероятнее для одного: выиграть три партии из четырех или шесть из восьми?

Вариант 2

1. A, B, X — три различных непустых множества. Может ли быть, что $A \cap X = A \cup B$ и $A \cup X = A \cap B$?
2. Решите неравенство $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} > \frac{1}{C_6^x}$.
3. Имеется бином $(x^2 - 1)^7$. При каких значениях x модуль четвертого члена разложения не меньше модуля пятого члена разложения?
4. Чему равна сумма $\sum_{i=0}^{10} 10^{-i} C_{10}^i$?
5. Сколько нечетных чисел, меньших 10^4 , можно составить из цифр 5, 6, 7?
6. Имеется 50 белых и 100 черных шаров. Сколькими способами их можно выложить в ряд, чтобы два белых шара не лежали рядом?
7. Два шахматиста одинакового уровня играют без учета ничьих. Что вероятнее для одного: выиграть две партии из четырех или четыре из восьми?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Тема 1

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Задание 1.1. Функциональная символика

Вариант 1

1. а) $y(0) = -1$; б) $y\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{13}{9}$;
в) $y(\sqrt{3}) = -3 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} - 4$; г) $y(2x) = -4x^2 + 2x - 1$;
д) $y(x+1) = -(x+1)^2 + x + 1 - 1 = -x^2 - x - 1$;
е) $y(x+\Delta x) - y(x) = -(x+\Delta x)^2 + x^2 + x + \Delta x - x =$
 $= -2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + \Delta x$.
2. а) Так как $0,9^{0,5} < 1$, то $f(0,9^{0,5}) = \frac{1}{0,9^{2 \cdot 0,5}} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}$;
б) так как $0,8^{-1} = \frac{1}{0,8} > 1$, то $f(0,8^{-1}) = 0,8^{-1} + 1 = 2,25$;
в) $a^2 + 1 \geq 1$, поэтому $f(a^2 + 1) = \begin{cases} \frac{1}{(a^2 + 1)^2} & \text{при } a = 0, \\ a^2 + 2 & \text{при } a \neq 0. \end{cases}$
Значит, $f(a^2 + 1) = \begin{cases} 1 & \text{при } a = 0, \\ a^2 + 2 & \text{при } a \neq 0. \end{cases}$
3. а) $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; б) $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) = -2$;
в) $g(1) = \sin(1) + \cos(2)$;
г) $g(x + \pi) = \sin(x + \pi) + \cos(2x + 2\pi) = -\sin x + \cos(2x)$;
д) $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - 2x) = \cos x - \cos 2x$.
4. $x(-t) = \sqrt{1 - (-t)^2} = \sqrt{1 - t^2} = x(t)$. Значит, утверждение верно.
5. Пусть $h(x) = ax + b$. Определим коэффициенты a и b . Используем условия: $h(-1) = -a + b = 0$, $h(0) = b = 1$. Значит, $a = b = 1$. Тогда $h(1) = a + b = 2$.

Вариант 2

1. а) $y(0) = -1$; б) $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{7}{4}$;
в) $y(-\sqrt{3}) = -3 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} - 4$; г) $y(0,5x) = -0,25x^2 - 0,5x - 1$;
д) $y(-x+1) = -(-x+1)^2 + x - 1 - 1 = -x^2 + 3x - 3$;
е) $y(x+\Delta x) - y(x) = -(x+\Delta x)^2 - x - \Delta x + x^2 + x = -2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 - \Delta x$.

2. а) Так как $1,1^{0,5} > 1$, то $f(1,1^{0,5}) = \frac{1}{1,1^{0,5}} = \left(\frac{10}{11}\right)^{0,5}$;
 б) так как $1,2^{-1} < 1$, то $f(1,2^{-1}) = -1,2^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{1,2} = \frac{1}{6}$;
 в) $a^2 + 1 \geq 1$, $a^2 + 1 = 1$ при $a = 0$, $a^2 + 1 > 1$ при $a \neq 0$, поэтому
- $$f(a^2 + 1) = \begin{cases} \frac{1}{a^2 + 1}, & \text{если } a \neq 0, \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$
3. а) $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; б) $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$;
 в) $g(-1) = \cos 1 - \sin 2$; г)
 $g(x - \pi) = \cos(x - \pi) + \sin(2x - 2\pi) = -\sin x + \sin 2x$.
 д) $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - 2x) = \sin x + \sin 2x$.
4. $x(-t) = (-t) - (-t)^3 = -(t - t^3) = -x(t)$. Утверждение верно.
5. Пусть $h(x) = ax + b$. Из условий задачи имеем $h(1) = a + b = 0$, $h(0) = b = 1$. Значит, $a = -b = -1$. Поэтому $h(-1) = 1 + 1 = 2$.

Задание 1.2. Сложная функция

Вариант 1

1. а) $h(0) = 1$; б) $h(h(0)) = h(1) = \frac{1}{2}$.
2. $z(x) = (3x - 1)^{-3} = y_1(y_3(y_2(x)))$.
3. а) $f_1(f_1(x)) = (x^2)^2 = x^4$; б) $f_2(f_2(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$;
 в) $f_2(f_1(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$; $f_1(f_2(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, последнее равенство верно при $x \geq 0$. Значит, исходное уравнение примет вид $|x| = x$, $x \geq 0$. Это уравнение имеет решения $x \geq 0$.
4. а) $f(\varphi(x)) = f(-f(x)) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$ График этой функции приведен на рис. 1.
- б) $\varphi(\varphi(x)) = -f(-f(x)) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ График этой функции приведен на рис. 2.

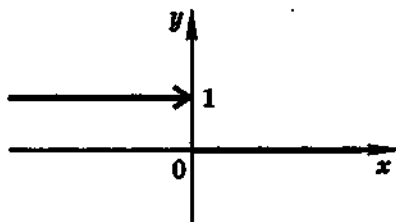


Рис. 1

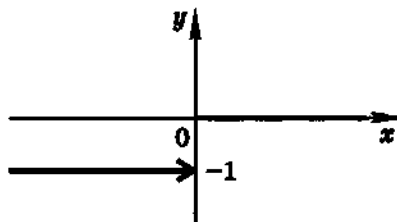


Рис. 2

5. Например, условию задачи удовлетворяет функция $y = [x]$ — целая часть числа, т. е. функция принимает только целые значения, для любого x значение $y = [x]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее x . $[[x]] = [x]$.

Вариант 2

- а) $h(0) = -1$; б) $h(0) = -1$. $h(h(0)) = ((-1)^2 - 1)^{-1}$ — значение не определено.
- $z(x) = y_3(y_2(y_1(x)))$.
- а) $f_1(f_1(x)) = (x^4)^4 = x^{16}$; б) $f_2(f_2(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$;
в) $f_2(f_1(x)) = \sqrt{x^4} = x^2$; $f_1(f_2(x)) = (\sqrt{x})^4 = x^2$, верно при $x \geq 0$, поэтому исходное уравнение примет вид $x^2 = x^2$ и оно имеет решения $x \geq 0$.
- а) $f(\varphi(x)) = f(-f(x)) = 0$. График этой функции — прямая $y = 0$ (рис. 3).
б) $f(f(x)) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ График этой функции приведен на рис. 4.

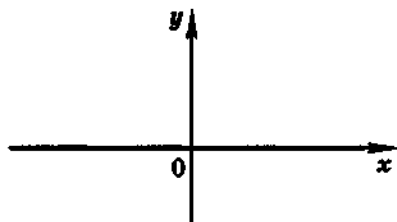


Рис. 3

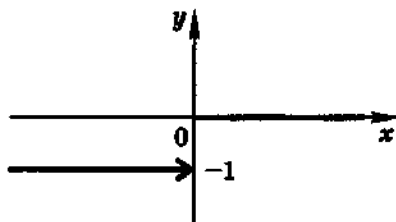


Рис. 4

5. Например, условию задачи удовлетворяет функция $f(x) = -[x]$, где $[x]$ — целая часть числа x .

Задание 1.3. Область определения функции

Вариант 1

- а) Область определения функции $f(x)$ — все x , удовлетворяющие системе $\begin{cases} \frac{x+1}{11-x} \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$ которая равносильна системе $\begin{cases} 11-x > 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$ ее решение $x \in [0; 11)$ есть область определения функции $f(x)$.
б) Область определения функции $g(y)$ — решение неравенства $1 - y^2 > 0$. Значит, область определения есть все $y \in (-1; 1)$.

в) Функция $y = x^{0,5}$ определена при $x > 0$, а функция $y = \sqrt{1-t^2}$ определена при $1-t^2 \geq 0$, поэтому функция $h(z)$ определена при условиях $\begin{cases} 1-z^2 \geq 0, \\ \sqrt{1-z^2}-1 > 0. \end{cases}$ Эта система равносильна системе $\begin{cases} z^2 \leq 1, \\ z^2 < 0, \end{cases}$ которая не имеет решений. Значит, область определения функции — пустое множество: $z \in \emptyset$.

2. Например, функция $y = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$.

3. Левая часть уравнения не может быть отрицательной, поэтому и правая часть $a-1$ тоже неотрицательна. Откуда получаем, что $a-1 \geq 0$, то есть $a \geq 1$. Область допустимых значений такова:

$$\begin{cases} |x| - a \geq 0, \\ a^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq a, \\ a^2 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq |x| \leq |a|, \text{ и так как } a \geq 1, \text{ то}$$

$|a| = a$ и получаем неравенство $a \leq |x| \leq a$, то есть $|x| = a$. Подставим это значение для $|x|$ в левую часть уравнения и увидим, что она обращается в 0. Тогда правая часть уравнения $a-1=0$, $a=1$. Итак, при $a=1$ решение уравнения $|x|=a=1$, то есть $x = \pm 1$. При $a \neq 1$ уравнение не имеет решений.

Вариант 2

1. а) Область определения функции $f(x)$ — решение системы

$$\begin{cases} \frac{13-x}{x+3} \geq 0, \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq 0, \text{ то есть } x \in (-3; 0].$$

б) Область определения функции $g(y)$ — все y из неравенства $y^2 > 1 \Leftrightarrow y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

в) область определения функции $h(z)$ — все z , удовлетворяющие системе $\begin{cases} 1-z^2 \geq 0, \\ 1-\sqrt{1-z^2} > 0, \end{cases}$ которая имеет решения $z \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.

2. Например, $y(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$.

3. Левая часть уравнения неотрицательна при всех допустимых значениях a и x . Правая часть уравнения тоже должна быть неотрицательной, что выполняется при $a \leq 0$. Если $a < 0$, то подкоренное выражение $a-|x|$ неположительно. Поэтому остается рассмотреть только $a=0$. При этом уравнение примет вид $\sqrt{-|x|} + \sqrt{x^2} = 0$. Это уравнение имеет единственное решение $x=0$. Итак, при $a=0$ решение $x=0$, при $a \neq 0$ решений нет.

Задание 1.4. Область значений функции

Вариант 1

1. а) $3x^2 - 5x + 1 = 3(x^2 - \frac{5}{3}x) + 1 = 3[(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{36}] + 1 = 3(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{12} + 1 = 3(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{13}{12}$. Наименьшее значение функция $f(x)$ принимает в точке $x = \frac{5}{6}$, и $f(\frac{5}{6}) = -\frac{13}{12}$. Наибольшее значение $f(2) = 3$. Итак, $-\frac{13}{12} \leq f(x) \leq 3$ при $0,5 \leq x \leq 2$.

б) Наименьшее значение функции $g(y) = |y - 1|$ равно 0 при $y = 1$. Наибольшее значение равно 2, оно достигается при $y = -1$ и $y = 3$. $0 \leq g(y) \leq 2$, если $-1 \leq y \leq 3$.

в) Так как значения функции $y = \sin(x)$ — все числа y по модулю, не превосходящие 1, то $2 - 1 \leq h(z) \leq 2 - (-1)$, то есть $1 \leq h(z) \leq 3$ при всех $z \in R$.

2. Пусть ABC — данный треугольник и $DEFG$ — прямоугольник, удовлетворяющий условию задачи. Тогда $DE = GF = x$. Прямоугольные треугольники AGD и BFE равны, поэтому $AD = BE = \frac{AB - DE}{2} = \frac{1 - x}{2}$. Из треугольника BFE имеем $FE = BE \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1 - x}{2} \cdot \sqrt{3}$. Тогда площадь прямоугольника $S_{DGFE} = \frac{x(1 - x)}{2} \cdot \sqrt{3}$. Согласно условию $0 < x < 1$, на этом промежутке квадратичная функция $x(1 - x)$ находится в границах от 0 до $\frac{1}{4}$: $0 < x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$, тогда

$$0 < S_{DGFE} \leq \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

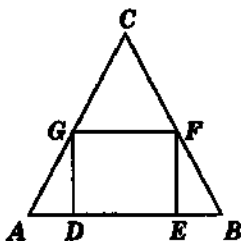


Рис. 5

3. Левая часть уравнения при $x \neq 0$ $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$. Правая часть уравнения при любых $x \neq 0$ $\sqrt{4 - x^{10}} < \sqrt{4} = 2$. Отсюда следует, что уравнение решений не имеет.

Вариант 2

1. а) $-2x^2 + x + 2 = -2(x^2 - \frac{x}{2}) + 2 = -2[(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}] + 2 = -2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{17}{8}$. Наибольшее значение функции $f(x)$ равно $\frac{17}{8}$ при $x = \frac{1}{4}$. Наименьшее значение функции при $-1 \leq x \leq 1$ $f(-1) = -1$. Поэтому, если $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq f(x) \leq \frac{17}{8}$.
- б) Если $-3 \leq y \leq 1$, $0 \leq g(y) \leq 2$.
- в) $0 \leq h(z) \leq 2$ при $z \in R$.

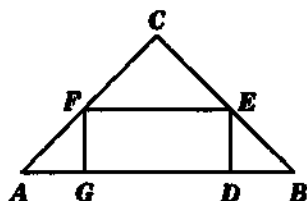


Рис. 6

2. Пусть ABC и $DEFG$ — треугольник и прямоугольник, удовлетворяющий условию задачи (рис. 6). $AB=1$, $GD=FE=x$. Треугольники AFG и BED равные и равнобедренные и $AG = DB = DE = \frac{AB - GD}{2} = \frac{1-x}{2}$. Тогда площадь прямоугольника $S_{DEFG} = \frac{x(1-x)}{2}$. Из условия задачи следует, что $0 < x < 1$, поэтому функция $\frac{x(1-x)}{2}$ принимает значения от 0 до $\frac{1}{8}$. $0 < \frac{x(1-x)}{2} \leq \frac{1}{8}$. Значит, $0 < S_{DEFG} \leq \frac{1}{8}$.

3. Левая часть уравнения $x^2 + x^{-2}$ при $x \neq 0$ больше или равна 2, а правая часть $\sqrt{4 - |x|}$ при $x \neq 0$ меньше 2. Поэтому уравнение не имеет решений.

Задание 1.5. Четность и нечетность функции

Вариант 1

1. Для любого $x \in R$:

- а) $f(-x) = (-x)^3 |x|$. Значит, функция — нечетная;
 б) функция не является ни четной, ни нечетной. Например, $x(1) = 1$, а $x(-1) = 3$;
 в) функция $y = \sin(a)$ — нечетная функция, а функция $y = \cos(a)$ — четная функция, поэтому

$$\varphi(-a) = \sin(-a) \cdot \cos(-a) = -\sin a \cdot \cos a = -\varphi(a).$$

Функция $\varphi(a)$ — нечетная функция;

г) функция $g(y)$ не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения не является симметричной относительно 0. Функция $g(y)$ определена при $y = -1$, но не определена при $y = 1$.

2. а) Функция $f_1(x)$ — четная функция. В самом деле, $f_1(-x) = f(-(-x)) = f(x) = f(-x) = f_1(x)$.
 б) $f_2(x)$ — нечетная функция. Действительно, $f_2(-x) = (-x)f(-x) = -xf(x) = -f_2(x)$.
3. Пусть $x^2=1$, т. е. $x=\pm 1$. Вычислим значения функции $f(x^2)$ в этих точках. $f(1^2) = 1$, с другой стороны, $f((-1)^2) = -1$. Но заметим, что $f((-1)^2) = f(1^2)$, т. е. функция $f(t)$ принимает два значения при $t = 1$. Это противоречит определению функции. Значит, не существует функции, удовлетворяющей условию задачи.

Вариант 2

1. а) Функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, так как $f(1) = 0$, а $f(-1) = 2$.

б) Функция $x(t)$ не является ни четной, ни нечетной, так как $x(-2) = -5$, $x(2) = 11$.

в) Функция $\varphi(a)$ — четная, так как

$$\varphi(-a) = \cos^2(-a) - \sin^2(-a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \varphi(a).$$

г) Функция $g(y)$ не является ни четной, ни нечетной, так как область определения функции не является симметричной относительно точки $y = 0$, а именно функция не определена при $y = -1$ и определена при $y = 1$.

2. а) Функция $f_1(x)$ является нечетной, так как $f_1(-x) = f(-(-x)) = -f(-x) = -f_1(x)$.

б) Функция $f_2(x)$ — четная. Действительно, она определена при любом $x \in \mathbb{R}$ и $f_2(-x) = (-x)f(-x) = -(-x)f(x) = xf(x) = f_2(x)$.

3. Вычислим значения функции f при $x = 2$ и $x = -2$. Следуя определению, при $x = 2$ $f(|2|) = f(2) = -2$, а при $x = -2$ $f(|-2|) = -(-2) = 2$. Но так как $|-2| = 2$, $f(|-2|)$ должна быть равна $f(|2|) = 2$. Значит, функция принимает два значения при $x = -2$. Такого быть не может. Функции, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Задание 1.6. Четность и нечетность функции

Вариант 1

1. а) $h(z) = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}(-z) = \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z = 0$ при всех $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Функция является четной и нечетной одновременно.

б) Функция $f(x)$ — нечетная, так как она определена при $x \neq \pm 1$ и $f(-x) = (-x-1)^{-2} - (-x+1)^{-2} = ((x-1)^{-2} - (x+1)^{-2}) = -f(x)$.

в) Функция $g(y)$ не является ни четной, ни нечетной, так как она не определена при $y = 1$ и определена при $y = -1$.

2. Так как искомая функция четная, то из равенства $f(x) + f(-x) = x$ следует, что $2f(x) = x$ и $f(x) = \frac{x}{2}$. Но получившаяся функция нечетная. Противоречие. Значит, функции, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

3. Нетрудно проверить, что $x = 0$ является корнем этого уравнения. Пусть x_0 — какой-то его корень, тогда и $-x_0$ является его корнем, так как в обеих частях этого уравнения стоят четные функции. Но тогда вместе с нулевым корнем число корней будет нечетным, т. е. точно не равным 10.

Вариант 2

1. а) $h(z)$ — нечетная и четная функция, так как при $z \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
 $h(-z) = \operatorname{ctg}(-z) + \operatorname{ctg}(-(-z)) = -\operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} z = 0$. См. вар. 1.
 б) $f(x)$ — нечетная функция. Действительно, функция определена для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = \pm 1$, и

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x+1)^{-2} - (1-(-x))^{-2} = (1-x)^{-2} - (x+1)^{-2} = \\ &= -((x+1)^{-2} - (1-x)^{-2}) = -f(x). \end{aligned}$$

в) $g(y)$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Действительно, $g(1) \neq g(-1)$, так как $g(1) = -\sqrt{10}$, а $g(-1) = \sqrt{12}$.

2. Пользуясь свойством нечетности функции $f(x)$ исходное равенство можно переписать так: $2f(x) = x^2$, откуда следует, что $f(x) = \frac{x^2}{2}$ — четная функция. Пришли к противоречию. Значит, не существует функции $f(x)$, удовлетворяющей условию задачи.
3. Уравнение не может иметь 10 корней. Задача решается аналогично задаче 3 варианта 1.

Задание 1.7. Монотонность функции

Вариант 1

1. а) Функция $f(x)$ — квадратичная, и ее график — парабола. Вершина параболы в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$. Ветви параболы направлены вверх, поэтому при $x < -1$ (левее вершины) функция убывает.
 б) Так как $y > 2$, то $g(y) = |y^{-1} - 1| = 1 - \frac{1}{y}$. Исходя из монотонности гиперболы $\frac{1}{y}$ при $y > 2$, видим, что $g(y)$ возрастает на $(2; +\infty)$.
2. а) Преобразуем функцию $h(z)$.

$$h(z) = \frac{2z+3}{3z+1} = \frac{2}{3} \frac{z+\frac{3}{2}}{z+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{7}{9} \frac{1}{z+\frac{1}{3}}.$$

Исходя из свойств гиперболы $\frac{1}{z+\frac{1}{3}}$ видим, что $h(z)$ убывает на промежутках $z \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$.

б) Для определения промежутков монотонности исходной функции достаточно рассмотреть функцию $3a^4 + |a|$. Она есть сумма двух функций. Функция $y = 3a^4$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$. Функция $y = |a|$ тоже убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$. Поэтому функция $f(a)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

в) Функция $y(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $[0; +\infty)$.

Вариант 2

1. а) График функции $f(x)$ — парабола с вершиной $(x_0; f(x_0))$, где $x_0 = \frac{1}{2}$, ветви параболы направлены вверх. При $x > 1$ функция $f(x)$ возрастает.
 б) При $y < -2$ $|y^{-1} + 1| = 1 + \frac{1}{y}$, и так как функция $\frac{1}{y}$ убывает, то и функция $g(y)$ убывает при $y < -2$.
2. а) $\frac{3x-1}{2x-8} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-\frac{8}{3}}$, поэтому функция $h(x)$ убывает на $(-\infty; \frac{8}{3})$ и на $(\frac{8}{3}; +\infty)$.
 б) Функция $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0]$ и убывает на $[0; +\infty)$.
 в) Функция $y(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и на $(0; +\infty)$, но при этом неверно то, что она убывает при $x \in R$, так как, например, $y(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^8}$, а $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $y(-\frac{1}{2}) < y(\frac{1}{2})$.

Задание 1.8. Монотонность функции

Вариант 1

1. а) Не всегда. Например, $y = x + 1$ на $[-2; 0]$; $z = x + 0,5$ на $[-2; 0]$. Произведение $y \cdot z$ есть квадратичная функция, которая на промежутке $[-2; 0]$ не монотонна.
 б) Не всегда. Например, $y = \sqrt{x}$ на $[0; 2]$ и $z = x^2$ на $[0; 2]$. Разность $y - z$ равна 0 при $x = 0$ и $x = 1$. При $x = \frac{1}{4}$ разность $y - z = \frac{7}{16}$, поэтому функция не монотонна на $[0; 2]$.
2. $x = 10$, что подтверждает непосредственная подстановка. Других корней уравнение не имеет, так как функция в левой части уравнения монотонна.
3. При $1 \leq x \leq 2$ $x^2 - x \geq 0$. Откуда следует, что $|x^2 - x| = x^2 - x$. Так как $x^2 - x$ возрастает от 0 до 3, то и $|x^2 - x|$ возрастает в тех же границах. Функция $-x^4 + 20$ убывает от 19 до 4, значит, неравенство верно.
4. Не всегда. Например, функции, графики которых имеют вид (рис. 7):

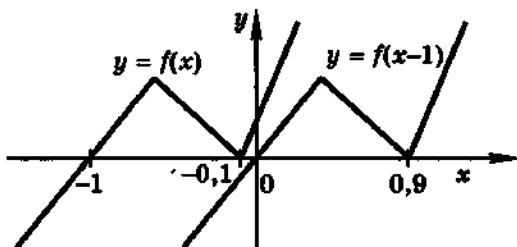


Рис. 7

Вариант 2

1. а) Да, так как при $x_2 > x_1$ имеем $y(x_2) > y(x_1)$ и $z(x_2) > z(x_1)$. Откуда следует, что $y(x_2) + z(x_2) > y(x_1) + z(x_1)$.
 б) Не всегда. Например, $y = x^2$ и $z = x^3$, $x \in [-1; 1]$. $\frac{y}{z} = \frac{1}{x}$ — эта функция монотонна на $[-1; 0)$ и $(0; 1]$.
2. $x = 6$. См. вар. 1.
3. При $x \in [-2; 1]$ $|x^2 + x|$ меняется от $\frac{1}{4}$ до 2, а $-x^4 + 20$ — от 4 до 19. Значит, неравенство верно.
4. Не всегда. Например, функции, графики которых имеют вид (рис. 8):

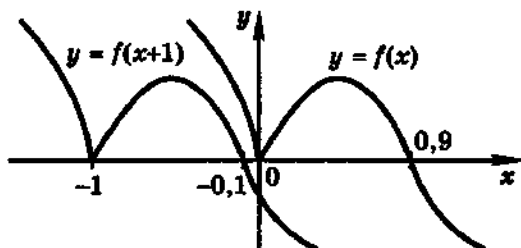


Рис. 8

Задание 1.9. Ограниченность функции

Вариант 1

1. а) Да, $y \in [1; 16]$. В силу монотонности этой функции достаточно вычислить ее значения на концах данного промежутка.
 б) Да, $x \in [2; 11]$. Достаточно вычислить значения функции на концах данного промежутка и в точке $a = 1$, вершине параболы — графике данной функции.
 в) Нет. Функцию представим в виде $g(k) = \frac{k^2 + 1}{k} = k + \frac{1}{k}$. Функция k неограниченная при $k \rightarrow \infty$, функция $\frac{1}{k}$ — при $k \rightarrow 0$, поэтому $g(k)$ не является ограниченной функцией.
2. а) Да. Пусть $F \leq L$ ($L > 0$), тогда $F^2 \leq L^2$.
 б) Не всегда, так как F может принимать нулевые значения.
3. Нет решений. Рассмотрим неравенство (свойство модуля)

$$|(2x^2 - 1) + (3 - x^2)| \leq |2x^2 - 1| + |3 - x^2|,$$

откуда получаем, что

$$|x^2 + 2| \leq |2x^2 - 1| + |3 - x^2| \text{ или } 2 \leq |2x^2 - 1| + |3 - x^2|.$$

По условию задачи выражение в правой части должно быть не больше 1. Но этого быть не может, так как оно не меньше 2.

Вариант 2

1. а) Да, $y \in [-4; -3]$. Надо вычислить значения функции на концах промежутка.
 б) Да, $x \in [-4; 0]$. Надо вычислить значения функции в точках $a = -3$, $a = -1$, $a = 0$ и взять наименьшее и наибольшее значения.
 в) Нет, так как $g(h) = h^3 + \frac{1}{h}$ и h^3 и $\frac{1}{h}$ не являются ограниченными функциями.
2. а) Да. Пусть $F \leq L$ ($L > 0$). Тогда $F^3 \leq L^3$.
 б) Не всегда. F может принимать нулевые значения.
3. Нет решений.
 $|10 - x^2| + |2x^2 - 5| \geq |10 - x^2 + 2x^2 - 5| = |x^2 + 5| \geq 5$.
 Поэтому сумма не может быть меньше 1.

Задание 1.10. Обратная функция

Вариант 1

1. $g(x)$ определена при $x \geq 0$ и $g(x) = x^2$. Тогда: а) $g(2) = 4$; б) $g(-a) = (-a)^2$, если $a \leq 0$.
2. а) Решим уравнение $y = 2x - 3$ относительно x . Тогда $x = \frac{y+3}{2}$ — это обратная функция $x(y)$.
 б) Аналогично получим, что $y = 1 + \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.
 в) $t = \frac{z+1}{z-1}$, $z \neq 1$.
3. Да. Решим уравнение $y = \frac{2x}{1-x^2}$ относительно x . Получим

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Так как для $x > 1$ $y < 0$, то при $y < 0$ решение уравнения $x > 1$
 $x = -\frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y}$ единственно.

4. Нет. Например, $y = (x-1)^3$ и $y = \sqrt[3]{x} + 1$ взаимно обратны на $\mathbb{R}$, а $y = (-x-1)^3$ и $y = \sqrt[3]{-x} + 1$ нет.

На рис. 9 приведены графики функций $y = (x-1)^3$ и $y = \sqrt[3]{x} + 1$, они симметричны относительно прямой $y = x$.

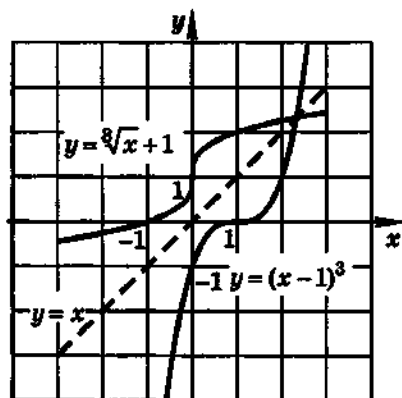


Рис. 9

Вариант 2

1. Функция $g(x)$, обратная для $f(x)$, будет $g(x) = x^8$, поэтому:

а) $g(-2) = (-2)^8 = -8$; б) $g(a) = a^8$.

2. а) Решим уравнение $y = -5x + 1$ относительно x . Тогда $x = \frac{1-y}{5}$ — это обратная для $y(x)$ функция.

- б) Решим уравнение $x = -y^2 - 2y$ относительно y .

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4x}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-x}.$$

Как выбрать знак? По условию задачи $y \in [-2; -1]$, значит, x при таких y принимает значения от 0 до 1. $x(-2) = 0$, поэтому $y(0) = -2$. Значит, функция имеет вид $y(x) = -1 - \sqrt{1-x}$.

в) $t(z) = \frac{z+1}{1-z}$, $z \neq 1$.

3. Да. Функция $y(x)$ на промежутке $(1; +\infty)$ возрастает. Докажем это. Пусть $x_2 > x_1 > 1$. Рассмотрим

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{x_2^2}{1-x_2^3} - \frac{x_1^2}{1-x_1^3} = \frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2+x_2x_1)}{(1-x_2^3)(1-x_1^3)}.$$

Эта разность при $x_2 > x_1 > 1$ больше нуля. Значит, $y(x_2) > y(x_1)$, т. е. $y(x)$ возрастает. Монотонная на промежутке функция имеет обратную, так как любому y соответствует единственное значение x .

4. Нет. Например, функции из задачи 4, вар. 1. Функции $y = -f(x) = -(x-1)^3$ и $y = -g(x) = -\sqrt[3]{x-1}$ не являются взаимно обратными на $\mathbb{R}$.

Задание 1.11. Периодичность функции

Вариант 1

1. В условии задачи функция задана при $x \in [0; 3]$. Продолжим эту функцию на $[-3; 0]$, используя нечетность. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 12, & \text{если } -3 \leq x < -2, \\ 2x, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ -4x + 12, & \text{если } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

При этом функция задана на промежутке $[-3; 3]$, длина которого равна периоду этой функции (6). Теперь нетрудно ее продолжить на $[-6; 6]$.

а)

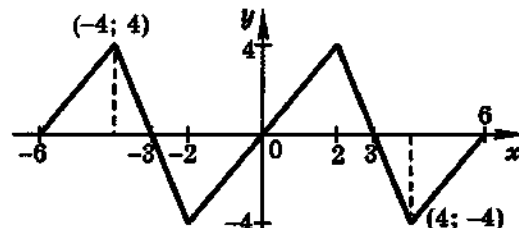


Рис. 10

$$6) f(1987) = f(1 + 6 \cdot 331) = f(1) = 2.$$

2. Да, если $t_1 + t_2 \neq 0$. Так как t_1 и t_2 — периоды, то для любого t $f(t + t_1) = f(t)$ и $f(t + t_2) = f(t)$. Рассмотрим для любого t $f(t + (t_1 + t_2)) = f((t + t_1) + t_2) = f(t + t_1) = f(t)$, откуда следует, что $(t_1 + t_2)$ — период $f(t)$.
3. Нет. Если предположить, что $\sqrt{3}$ — период, то $\sqrt{3} = k\sqrt{2}$, где k — какое-то целое число. Значит, $k = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Но $1 < \sqrt{\frac{3}{2}} < 2$, и $\sqrt{\frac{3}{2}}$ не является целым. Поэтому $\sqrt{3}$ не является периодом исходной функции.
4. Да. Пусть $f(t)$ — периодическая функция и T — период этой функции. Тогда $f(t + T) = f(t)$ и, если $f(t) \neq 0$, $\frac{1}{f(t+T)} = \frac{1}{f(t)}$. Если $f(t) = 0$, то функция $\frac{1}{f(t)}$ в этой точке не определена, также она не будет определена в точках $t + kT$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, функция $\frac{1}{f(t)}$ — периодическая.
5. Докажем, что периодом функции $f(x)$ является число 2.
 $f(x + 2) = f((x + 1) + 1) = -\frac{1}{f(x+1)} = \frac{-1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Вариант 2

1. Используя свойство четности, продолжим функцию $f(x)$ на промежуток $[-3; 0]$.

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 8, & \text{если } -3 \leq x < -2, \\ 2x + 4, & \text{если } -2 \leq x < 0, \\ -2x + 4, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ 4x - 8, & \text{если } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Используя период, равный 6, нетрудно продолжить теперь функцию на промежуток $[-6; 6]$.

а)

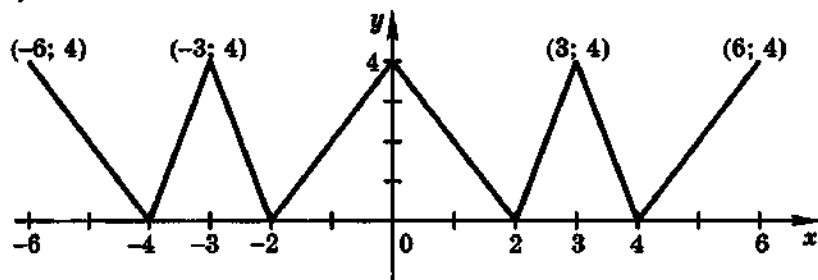


Рис. 11

$$б) f(1987) = f(1 + 6 \cdot 331) = f(1) = 2.$$

2. Да, если $t_1 - t_2 \neq 0$. См. вар. 1.

3. Нет, так как $\frac{\sqrt{5}}{3}$ не является целым числом. См. вар. 1.

4. Не всегда. Например, $f(x) = -1 - |\sin x|$.

5. Докажем, что периодом данной функции является число 2.

$$f(x) = f((x+1) - 1) = -\frac{1}{f(x+1)} = -\frac{1}{f((x+2) - 1)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(x+2)}} = f(x+2).$$

Задание 1.12. Преобразование графиков функций

Вариант 1

1. а) График функции $y = -2|1-x| + 1$ можно получить сдвигом графика $y = -2|x|$ на 1 вправо и на 1 вверх (рис. 12).

б) График функции $y = |-x^2 + |x| - 1|$ можно получить из графика функции $y = -x^2 + x - 1$. Функция $y = |-x^2 + |x| - 1|$ — четная, поэтому ее график симметричен относительно OY . Значения функции $y = -x^2 + x - 1$ отрицательные при всех x . Для того чтобы получить искомый график, достаточно симметрично отразить график $y = -x^2 + x - 1$ при $x \geq 0$ относительно оси OX , затем отразить относительно оси OY (рис. 13).

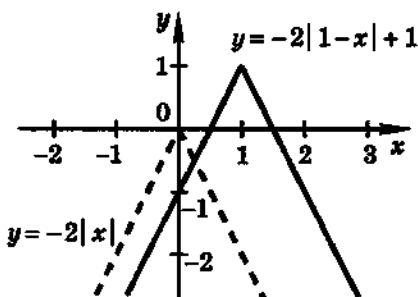


Рис. 12

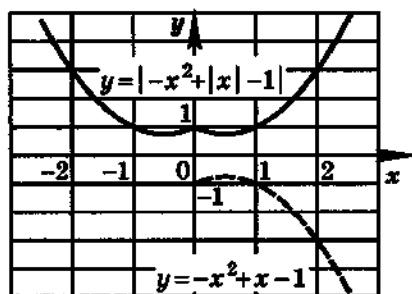


Рис. 13

в) Преобразуем выражение $\frac{2x+3}{1-x} = \frac{2x-2+5}{1-x} = -2 + \frac{5}{1-x}$, поэтому искомая функция имеет вид $y = |-2 + \frac{5}{1-x}| = |2 + \frac{5}{x-1}|$. График этой функции можно получить из графика функции $y = \frac{5}{x-1}$ сдвигом по оси OY на 2 вверх и отражением симметрично оси OX части графика для $y < 0$ (рис. 14).

г) Функция $y = \frac{x^4}{2|x|} - 1$ четная и определена при $x \neq 0$. График этой функции можно получить из графика $y = \frac{x^3}{2}$. Для этого

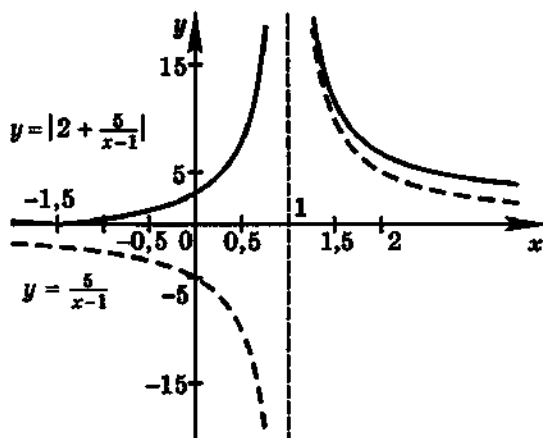


Рис. 14

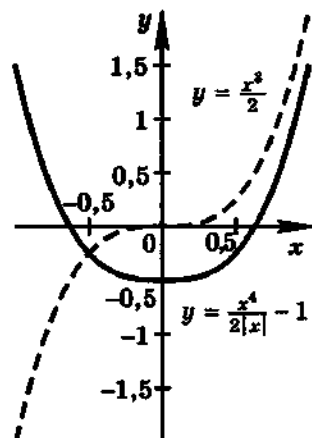


Рис. 15

сдвинем его на 1 вниз по оси OY , затем часть графика для $x > 0$ отразим относительно оси OY (рис. 15).

2. Уравнение можно переписать в виде $(x-a)^2 + \sqrt{x-a} = b$. Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда имеется пересечение графиков $y = (x-a)^2 + \sqrt{x-a}$ и $y = b$. Так как первый график получается из графика функции $y = x^2 + \sqrt{x}$ сдвигом на a единиц по оси OX , то существование решения не зависит от a . Можно исследовать пересечение графиков $y = x^2 + \sqrt{x}$ и $y = b$. Область значений функции $y = x^2 + \sqrt{x}$ есть $y \in [0; +\infty)$, поэтому графики пересекаются только при $b \geq 0$. Итак, уравнение имеет решения при $b \geq 0$ и $a \in \mathbb{R}$ (рис. 16).

Вариант 2

1. а) График функции $y = -3|2-x| - 2$ может быть получен из графика $y = -3|x|$ сдвигом на 2 вправо по оси OX и на 2 вниз по оси OY (рис. 17).

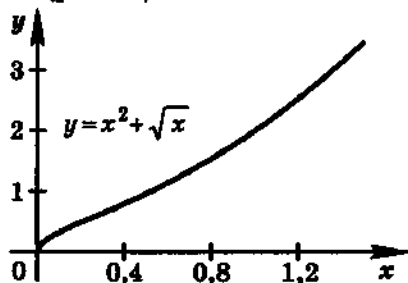


Рис. 16

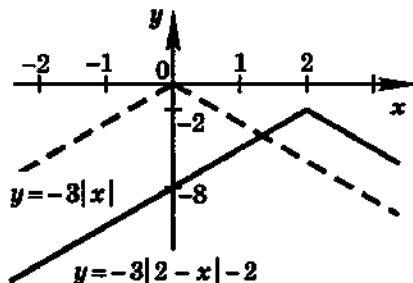


Рис. 17

б) График искомой функции получается из графика $y = x^2 - x + 1$ при $x \geq 0$ отражением относительно оси OY . Отметим, что искомый график совпадает с графиком функции из задачи 16 варианта 1.

в) Преобразуем выражение $\frac{3x+2}{1-x} = \frac{3(x-1)+5}{1-x} = -3 + \frac{5}{1-x}$. Поэтому искомая функция примет вид $y = |3 + \frac{5}{x-1}|$, график которой получается из графика функции $y = \frac{5}{x-1}$ сдвигом на 3 вверх по оси OY и отражением той части графика, которая ниже оси OX ($y < 0$), симметрично вверх относительно оси OX (рис. 18).

г) График функции $y = -\frac{2x^4}{|x|} + 1$ получается из графика $y = -2x^3$ сдвигом на 1 вверх по оси OY и отражением части графика для $x > 0$ симметрично относительно оси OY (рис. 19).

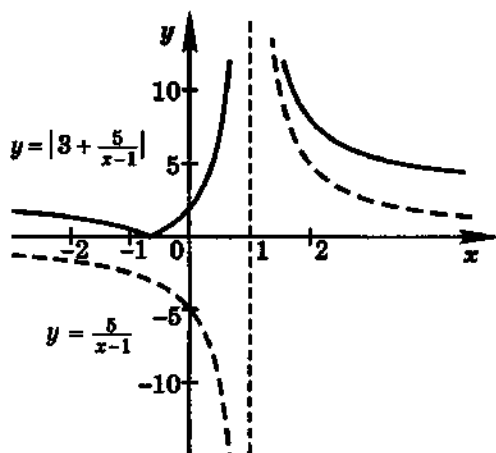


Рис. 18

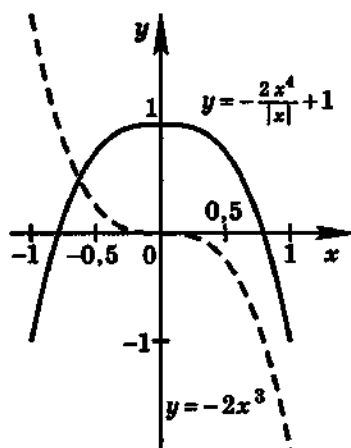


Рис. 19

2. Эта задача решается аналогично варианту 1 заменой b на $-b$. Уравнение имеет решения при $b \leq 0$ и $a \in R$.

Задание 1.13. Контрольное задание

Вариант 1

1. Пусть треугольник имеет катеты a и b , площадь S и периметр P . Тогда $a^2 + b^2 = 1$, $S = \frac{a \cdot b}{2}$. Рассмотрим $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Отсюда $(a+b)^2 = 1 + 4S$ или $a+b = \sqrt{1+4S}$, $P = \sqrt{1+4S} + 1$. График этой функции приведен на рис. 20.

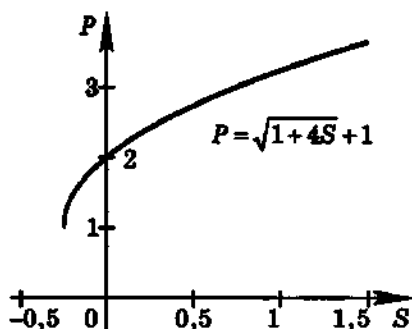


Рис. 20

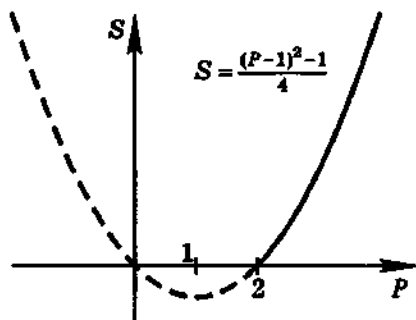


Рис. 21

2. $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Решим неравенство $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > \frac{1}{x^2+1}$. Левая часть этого неравенства при $x \geq 0$ не меньше 1, а правая часть не больше 1. Отсюда решение $x \in (0; +\infty)$.
3. а) $g(x) = x$, $h(x) = x + 1$.
 б) Не является единственной. Например, $g(x) = h(x) = x + \frac{1}{2}$.
 в) Да, такой пример приведен в пункте (б). В самом деле, $g(h(x)) = (x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = x + 1$.

Вариант 2

1. а) $S = \frac{(P-1)^2 - 1}{4}$, где S — площадь, P — периметр. См. решение вар. 1.
 б) График функции $S(P)$ приведен на рис. 21.
2. После преобразования получим неравенство $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} < \frac{1}{x^2+1}$, решение которого пустое множество. См. решение вар. 1.
3. а) Например, $g(x) = x - \frac{1}{3}$, $h(x) = x - \frac{2}{3}$.
 б) Не является единственной. Например, $g(x) = h(x) = x - \frac{1}{2}$.
 в) Да, см. пару функций из пункта (б); $g(h(x)) = (x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = x - 1$.

Тема 2

ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ

Задание 2.1. Определение предела функции в точке

Вариант 1

1. Рассмотрим $|f(x) - 3| = |2x + 1 - 3| = 2|x - 1|$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $2|x - 1| < \varepsilon$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ и любого x , удовлетворяющего

условию $|x-1| < \delta$, будет $2|x-1| < \varepsilon$, то есть $|f(x)-3| < \varepsilon$. Это означает, по определению предела, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

2. Рассмотрим такое $\varepsilon > 0$, что $|g(y)-11| < \varepsilon$ или $|y^2-9| < \varepsilon$, $|y-3||y+3| < \varepsilon$. Если для любого такого $\varepsilon > 0$ принять $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, то для любых y , таких, что $|y+3| < \delta$, будет выполнено неравенство $|g(y)-11| < \varepsilon$. Значит, $\lim_{y \rightarrow -3} g(y) = 11$.

3. Функция $h(z)$ непрерывна в точке $z = 2$. Поэтому предел $h(z)$ в точке $z = 2$ равен $h(z) = \frac{1}{2} \neq 1$. Можно также показать, что в окрестности точки $z = 2$ величина $|h(z) - 1|$ не может быть как угодно малой, что означает, что $\lim_{z \rightarrow 2} h(z) \neq 1$.

Вариант 2

1. Для $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$ и тогда для любого x , удовлетворяющего неравенству $|x-6| < \delta$, будет выполнено $|0,5x-3| < \varepsilon$, откуда следует, что $|f(x)-1| < \varepsilon$. Значит, $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 1$.
2. Для $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, и тогда для любого y , удовлетворяющего условию $|y+2| < \delta$, будет выполнено $|g(y)-1| < \varepsilon$. Значит, $\lim_{y \rightarrow -2} g(y) = 1$.
3. $h(-1) = 1$, и функция непрерывна в точке $z = -1$. Значит, $\lim_{z \rightarrow -1} h(z) = 2$.

Задание 2.2. Вычисление предела функции в точке

Вариант 1

1. а) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\Delta x} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2+\Delta x-2}{\Delta x(\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- б) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt[3]{1+t^2}-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(\sqrt[3]{(1+t^2)^2} + \sqrt[3]{1+t^2} + 1)}{(1+t^2)-1} = \lim_{t \rightarrow 0} (\sqrt[3]{(1+t^2)^2} + \sqrt[3]{1+t^2} + 1) = 3$.

При доказательстве помножили числитель и знаменатель на неполный квадрат выражения $\sqrt[3]{1+t^2} + 1$, тем самым получили разность кубов в знаменателе.

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x+2}{-x^2+3x+4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(4-x)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x+2}{4-x} = \frac{4}{5}.$$

$$г) \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^5+1}{y^7+1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{(y+1)(y^4-y^3+y^2-y+1)}{(y+1)(y^6-y^5+y^4-y^3+y^2-y+1)} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^4-y^3+y^2-y+1}{y^6-y^5+y^4-y^3+y^2-y+1} = \frac{5}{7}.$$

2. Пусть O_1 — центр описанной, O_2 — центр вписанной окружности, $O_1M \perp AB$, $O_2P \perp AB$. BK — высота, равная h . Тогда $O_1B = R$, и так как $O_1B = O_1A$, то $BM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$. $O_2P = r$ как радиус вписанной окружности, также $O_2K = r$ (рис. 22). Обозначим угол ABK как α .

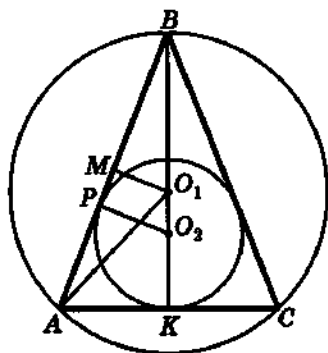


Рис. 22

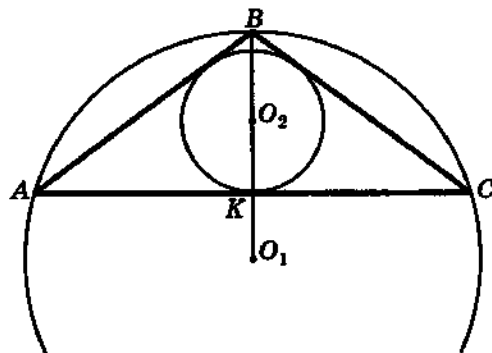


Рис. 23

Из $\triangle BMO_1 \cos \alpha = \frac{1}{2R}$. Из $\triangle BPO_2 \sin \alpha = \frac{r}{h-r}$, так как $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\frac{1}{4R^2} + \frac{r^2}{(h-r)^2} = 1$. Отсюда после несложных преобразований получим $h^2 + r^2 - 2hr - 4R^2h^2 + 8R^2rh = 0$. Разделим равенство на R^2 , тогда $\frac{r^2}{R^2} + \frac{h^2}{R^2} - 2h \frac{r}{R^2} - 4h^2 + 8rh = 0$. При $h \rightarrow 0$ получим $(\frac{r}{R})^2 \rightarrow 0$, то есть $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{R} = 0$. *Замечание.* Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, может быть и таким (рис. 23). Этот треугольник тупоугольный. Возможен и прямоугольный треугольник.

Вариант 2

$$1. \text{ а) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8+\Delta x} - \sqrt{8}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{8+\Delta x} - \sqrt{8})(\sqrt{8+\Delta x} + \sqrt{8})}{\Delta x (\sqrt{8+\Delta x} + \sqrt{8})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8+\Delta x - 8}{\Delta x (\sqrt{8+\Delta x} + \sqrt{8})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{8+\Delta x} + \sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{8}}.$$

$$б) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt[3]{8+t^2} - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(\sqrt[3]{8+t^2}^2 + 2\sqrt[3]{8+t^2} + 4)}{(\sqrt[3]{8+t^2} - 2)(\sqrt[3]{8+t^2}^2 + 2\sqrt[3]{8+t^2} + 4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(\sqrt[3]{8+t^2}^2 + 2\sqrt[3]{8+t^2} + 4)}{8+t^2 - 8} =$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4}{8} = 12.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 3}{-x^2 + 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1 + 2(x+1)}{(x+1)(5-x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 3)}{(x+1)(5-x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 3}{5-x} = \frac{5}{6}.$$

$$г) \frac{5}{6}; \text{ используем разложение } y^k - 1 = (y-1)(y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} + \dots + 1).$$

2. Пусть O_1 — центр описанной, O_2 — центр вписанной окружности, высота $BK = h$, $O_2P \perp AB$, $O_1M \perp AB$ (рис. 24). Так как $AC = 2$, $AK = \frac{AC}{2} = 1$. $BO_1 = R$, $O_2K = O_2P = r$. Обозначим угол ABK как α . Из $\triangle BMO_1$ имеем $\cos \alpha = \frac{AK}{R}$. Из $\triangle BPO_2$ имеем $\sin \alpha = \frac{r}{h-r}$. Из $\triangle ABK$ имеем

$$AB^2 = h^2 + AK^2 = h^2 + 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{AK}{h} = \frac{1}{h},$$

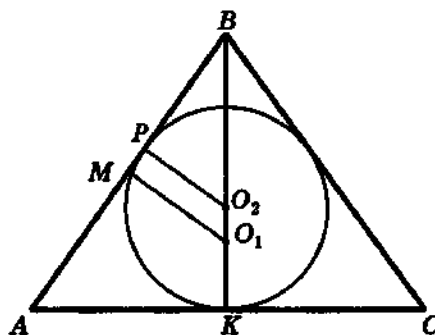


Рис. 24

и так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ то } \frac{1}{h} = \frac{r \cdot 2R}{(h-r)\sqrt{h^2+1}}.$$

Отсюда

$$\sqrt{h^2+1}(h-r) = 2hrR,$$

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{R} - \frac{2hr}{\sqrt{h^2+1}},$$

$$\sqrt{h^2+1}\left(\frac{h}{R} - \frac{r}{R}\right) = 2hr.$$

Предел этого отношения при $h \rightarrow 0$ равен 0. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{R} = 0$.

См. Замечание в вар. 1.

Задание 2.3. Предел функции на бесконечности

Вариант 1

1. а) $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((t+1)^{\frac{1}{3}} - (t-1)^{\frac{1}{3}}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t+1)^{\frac{1}{3}} - (t-1)^{\frac{1}{3}}}{(t+1)^{\frac{1}{3}} + (t-1)^{\frac{1}{3}} + (t^2-1)^{\frac{1}{3}}} =$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1-t+1}{((t+1)^{\frac{1}{3}} + (t-1)^{\frac{1}{3}})((t+1)^{\frac{1}{3}} + (t-1)^{\frac{1}{3}} + (t^2-1)^{\frac{1}{3}})} =$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{t^{\frac{1}{3}}((1+\frac{1}{t})^{\frac{1}{3}} + (1-\frac{1}{t})^{\frac{1}{3}})((1+\frac{1}{t})^{\frac{1}{3}} + (1-\frac{1}{t})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{1}{t^2})^{\frac{1}{3}})} = 0.$
 б) $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y+1)^{50}(y+2)^{60}}{(2y+3)^{110}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{50}(1+\frac{1}{y})^{50} y^{60}(1+\frac{2}{y})^{60}}{y^{110}(2+\frac{3}{y})^{110}} = \frac{1}{2^{110}}.$

2. Наклонная асимптота — это некоторая прямая $y = ax + b$, такая, что

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = -2, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1} + 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-2x^3 + x^2 - 1 + 2x^3 + 2x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1. \text{ Функция } f(x)$$

имеет наклонную асимптоту $y = -2x + 1$.

3. Возьмем любое число $R < 0$, тогда для любого числа $x \geq 1 - R$ получим, что $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2} < R$. Действительно, если подставим $x = 1 - R$, то

$$f(x) = \frac{1-(1-R)^3}{(1-R)^2} = \frac{R^3 + 3R - 3R^2}{R^2 - 2R + 1} < R, \text{ это неравенство равносильно}$$

$$R^3 + 3R - 3R^2 < R^3 - 2R^2 + R, 2R - R^2 < 0 \text{ и верно при любом } R < 0.$$

Функция $f(x)$ убывающая, поэтому при $x > 1 - R$ неравенство $f(x) < R$ выполняется. Тем самым доказали, что для сколь угодно большого по модулю отрицательного числа R значения функции для сколь угодно больших x будут меньше числа R . Значит, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Другой способ доказательства: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1-x^3} = 0$. Значит,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Знак предела определен по знаку $\frac{x^2}{1-x^3}$, это «минус».

4. Например, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Вариант 2

1. а) $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((t-1)^{\frac{1}{6}} - (t+1)^{\frac{1}{6}}) = 0$, см. вар. 1.

$$б) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y-1)^{50} (y-2)^{60}}{(2y-1)^{110}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{50} (1-\frac{1}{y})^{50} y^{60} (1-\frac{2}{y})^{60}}{y^{110} (2-\frac{1}{y})^{110}} = \frac{1}{2^{110}}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x \cdot x^2(1+\frac{2}{x^2})} = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 2} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 2x}{x^2 + 2} = -1$. Уравнение наклонной асимптоты: $y = 2x - 1$.

3. Возьмем любое число $R > 0$. Тогда для любого $x < -R$ получим, что $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2} > R$. Действительно, если подставим $x = -R$, $f(-R) = \frac{1+R^3}{R^2} = \frac{1}{R^2} + R > R$. Функция $f(x)$ убывающая, поэтому при любом $x < -R$ $f(x) > R$. Значит, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = +\infty$.

Можно доказать и по-другому. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x^3} = 0$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (при $x < 0$ $f(x) > 0$).

4. Например, $f(x) = -1 - \frac{1}{x}$.

Задание 2.4. Контрольное задание

Вариант 1

1. а) $\lim_{x \rightarrow a+1} \frac{x^2 - x - a}{x-1} = \frac{(a+1)^2 - a - 1 - a}{a} = a$, если $a \neq 0$; если $a = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$.

$$6) \lim_{t \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2t}-5}{\sqrt[3]{t}-2} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2t}-5)(\sqrt{9+2t}+5)}{(\sqrt[3]{t}-2)(\sqrt{9+2t}+5)} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{(2t-16)}{(\sqrt[3]{t}-2)(\sqrt{9+2t}+5)} =$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{t}-2)(\sqrt[3]{t^2}+4+2\sqrt[3]{t})}{(\sqrt[3]{t}-2)(\sqrt{9+2t}+5)} = 2 \frac{\sqrt[3]{64}+4+2\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}+5} = \frac{24}{10} = 2,4.$$

$$в) \lim_{z \rightarrow +\infty} (\sqrt{z^2-2}-z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{z^2-2}-z)(\sqrt{z^2-2}+z)}{(\sqrt{z^2-2}+z)} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-2}{z\sqrt{1-\frac{2}{z^2}+z}} = 0.$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (\sqrt{z^2-2}-z) = +\infty.$$

2. Функция $y(x)$ не определена в точке $x = 0$. Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота. Определим наклонную асимптоту $y = ax + b$.
 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{2}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - \frac{1}{2}x) = 0$. Значит, уравнение наклонной асимптоты: $y = \frac{1}{2}x$ (рис. 25).

3. Пусть $BK = h$. Площадь треугольника $S_{BKC} = \frac{KT \cdot BC}{2}$ или по другой формуле $S_{BKC} = \frac{BK \cdot KC}{2}$. Приравняем два выражения и используем, что $BC = 1$, $KC^2 = BC^2 - BK^2 = 1 - h^2$. Получим, что $KT = BK \cdot KC = h \cdot \sqrt{1-h^2}$. Из $\triangle BKT$ $BT^2 = BK^2 - KT^2 = h^2 - h^2(1-h^2) = h^4$. Значит, $BT = h^2$. $PT \parallel AC$ и $TM \perp BK$. Из прямоугольного треугольника BKT можно вычислить TM . Выражение для площади $S_{BKT} = \frac{BK \cdot TM}{2} = \frac{KT \cdot BT}{2}$, и поэтому $TM = \frac{KT \cdot BT}{BK} = h^2 \sqrt{1-h^2}$. Из прямоугольного $\triangle KTM$ имеем $MK^2 = KT^2 - TM^2 = h^2(1-h^2)^2$, $MK = h(1-h^2)$. Из подобия треугольников ABC и PBT : $\frac{PT}{AC} = \frac{BM}{BK}$, $BM = BK - MK = h - h(1-h^2) = h^3$. $PT = \frac{AC \cdot h^3}{h} = AC \cdot h^2$. Площади $S_{PKT} = \frac{PT \cdot MK}{2} = \frac{AC \cdot h^3(1-h^2)}{2}$, $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BK}{2} = \frac{AC \cdot h}{2}$. $\frac{S_{PKT}}{S_{ABC}} = h^2(1-h^2)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_{PKT}}{S_{ABC}} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2(1-h^2) = 0$.

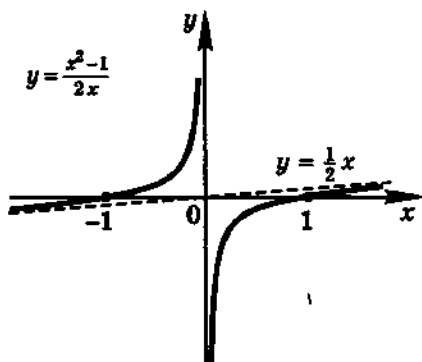


Рис. 25

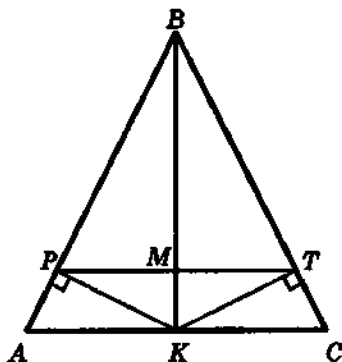


Рис. 26

Вариант 2

1. а) $\lim_{x \rightarrow a-1} \frac{x^2+x-a}{x+1} = \frac{(a-1)^2+a-1-a}{a-1+1} = \frac{a^2-2a}{a} = a-2$, если $a \neq 0$;

если $a = 0$, то $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$.

б) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+t}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{t}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2+t}-\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+\sqrt{3})}{(\sqrt[3]{t}-1)(\sqrt{2+t}+\sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt[3]{t^2}+1+\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t^2}+1+\sqrt[3]{t}} =$
 $= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(\sqrt[3]{t^2}+1+\sqrt[3]{t})}{(t-1)(\sqrt{2+t}+\sqrt{3})} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

в) $\lim_{z \rightarrow +\infty} (z - \sqrt{z^2+1}) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(z - \sqrt{z^2+1})(z + \sqrt{z^2+1})}{(z + \sqrt{z^2+1})} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^2 - z^2 - 1}{z + \sqrt{z^2+1}} = 0.$

$\lim_{z \rightarrow -\infty} (z - \sqrt{z^2+1}) = -\infty.$

2. Функция $y(x)$ не определена при $x \neq 0$. Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота. Определим наклонную асимптоту $y = ax + b$.

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3+1}{2x^2} = -\frac{1}{2},$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) + \frac{1}{2}x) = 0.$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = -\frac{x}{2}$ (рис. 27).

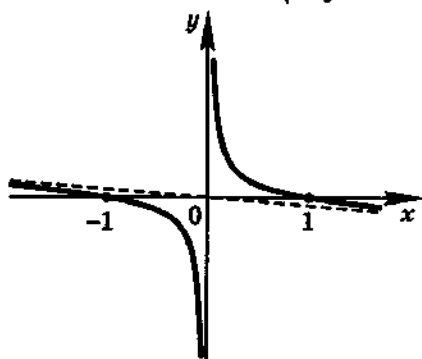


Рис. 27

3. Из варианта 1 следует, что $\frac{S_{KPT}}{S_{ABC}} = h^2 - h^4$, $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{S_{KPT}}{S_{ABC}} = \lim_{h \rightarrow 1} (h^2 - h^4) = 0$.

Задание 2.5. Непрерывность функции

Вариант 1

1. Из условия непрерывности определим k . $f(0) = 2$, поэтому $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 2$. $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = (x^2 + kx + k^2 + 1)|_{x=0} = k^2 + 1$. Уравнение для k такое: $k^2 + 1 = 2$, $k^2 = 1$, $k = \pm 1$. При $k = 1$ имеем

$$f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x \geq 0, \\ x^2 + x + 2, & x < 0. \end{cases}$$

При $k = -1$ имеем

$$f(x) = \begin{cases} |2-x|, & x \geq 0, \\ x^2 - x + 2, & x < 0. \end{cases}$$

В первом случае: график $y = f(x)$ (рис. 28а).
Во втором случае: график $y = f(x)$ (рис. 28б).

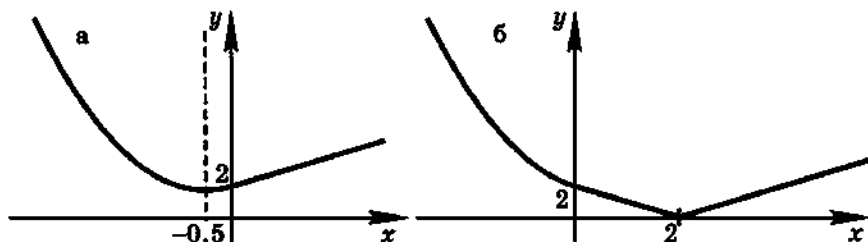


Рис. 28

2. Не всегда. Рассмотрим такой пример. Пусть f и g имеют разрыв в некоторой точке x_0 , причем при $x < x_0$ и $x > x_0$ обе функции непрерывны: $g(x_0) = c$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = c$, $f(x_0) = d$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} g(x) = d$.

Тогда $f(x)g(x)$ и $f(x) - g(x)$ определены в точке $x = x_0$; предел слева $\lim_{x \rightarrow x_0-0} g(x)f(x) = c \cdot d$, предел справа $\lim_{x \rightarrow x_0+0} g(x)f(x) = c \cdot d$;

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} (f(x) - g(x)) = d - d = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} (f(x) - g(x)) = c - c = 0$. Равенство пределов слева и справа означает, что функции $f(x)g(x)$ и $f(x) - g(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$. Эскиз графика может иметь вид, как на рис. 29.

Второе решение. Рассмотрим равенство $(f+g)^2 = (f-g)^2 + 4fg$. Так как $(f-g)$ и $f \cdot g$ непрерывны, то $(f+g)^2$ тоже непрерывна. Значит, непрерывна функция $\sqrt{(f+g)^2} = |f+g|$. Но из непрерывности модуля не следует непрерывность подмодуля.

3. Пусть прямая пересекает сторону AB в точке T и $AT = y$ (рис. 30). Тогда из $\triangle KAT$ имеем $L^2 = y^2 + AK^2 = y^2 + (\frac{1}{2})^2 = y^2 + \frac{1}{4}$ и из формулы для площади $\triangle KAT$ $y \cdot \frac{1}{2} = L \cdot x$. Решая систему двух уравнений для L

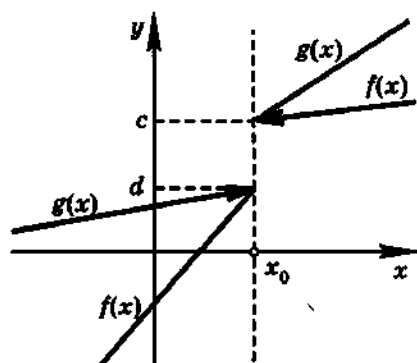


Рис. 29

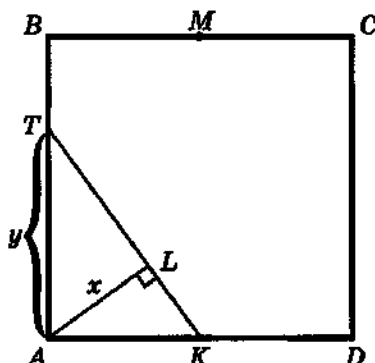


Рис. 30

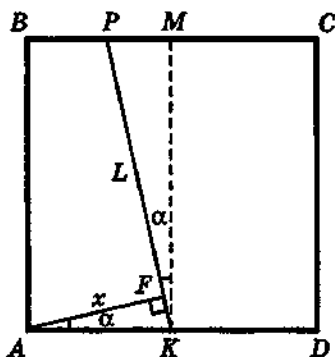


Рис. 31

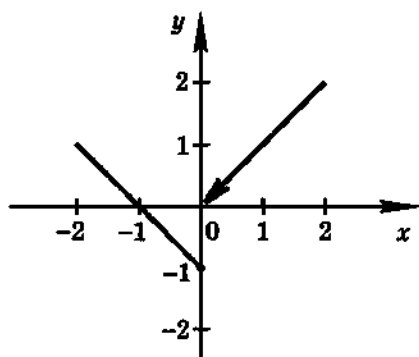


Рис. 32

и y , найдем $L = \frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}$. Если из тех же уравнений выразить x через y , то $x = \frac{y}{2\sqrt{4y^2+1}}$; так как $0 \leq y \leq 1$, то $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Причем $L=1$, если $x=0$; $L(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}$, если $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Пусть прямая пересекает отрезок BM в точке P . Пусть $MP=y$ и $\angle PKM=\alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = y$ (рис. 31). $AF \perp KP$. Тогда из $\triangle MPK$ имеем $L = \frac{y}{\sin \alpha}$, а из $\triangle AFK$ имеем $\cos \alpha = \frac{x}{AK} = 2x$. Отсюда найдем, что $L = \frac{1}{2x}$ и $x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. При движении по отрезку BM точки P y меняется от 0 до $\frac{1}{2}$. Значит, x меняется от $\frac{1}{\sqrt{5}}$ до $\frac{1}{2}$. Итак,

$$L(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \frac{1}{2x}, & \frac{1}{\sqrt{5}} < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Функция $L(x)$ имеет разрыв в точке $x=0$.

4. Не всегда. Например,

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{если } -2 \leq x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Область определения $x \in [-2; 2]$, область значений $y \in [-1; 2]$, разрыв в точке $x=0$ (рис. 32).

5. Да. Например, линией KCN (рис. 33). Дуга KM равна дуге MN , дуга AK равна дуге NB , $AC=BC$. Меняя положение точек K и N , можно менять площадь

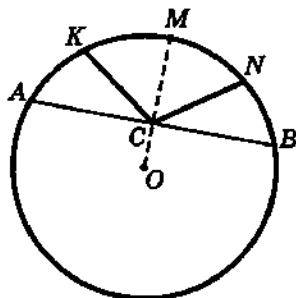


Рис. 33

фигуры KCN от 0 до S , где S — площадь сегмента. Ясно, что есть положения K и N такие, что площадь фигуры KCN равна $\frac{1}{3}S$, а площади фигур AKC и NBC равны.

Вариант 2

1. Функция $|kx - 2|$ и $x^2 + kx + k^2 - 3$ непрерывны. Функция $f(x)$ будет непрерывной, если $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$. Откуда следует, что $2 = k^2 - 3$, $k^2 = 5$, $k = \pm\sqrt{5}$. В случае $k = \sqrt{5}$

$$f(x) = \begin{cases} |\sqrt{5}x - 2|, & x \geq 0, \\ x^2 + \sqrt{5}x + 2, & x < 0, \end{cases}$$

и график, который при $x < 0$ совпадает с параболой $y = x^2 + \sqrt{5}x + 2$ и при $x \geq 0$ с графиком $y = |\sqrt{5}x - 2|$, состоящим из двух участков: при $0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$ прямая $y = 2 - \sqrt{5}x$ и при $x > \frac{2}{\sqrt{5}}$ прямая $y = \sqrt{5}x - 2$ (рис. 34а).

В случае $k = -\sqrt{5}$ (рис. 34б)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5}x + 2, & x \geq 0, \\ x^2 - \sqrt{5}x + 2, & x < 0. \end{cases}$$

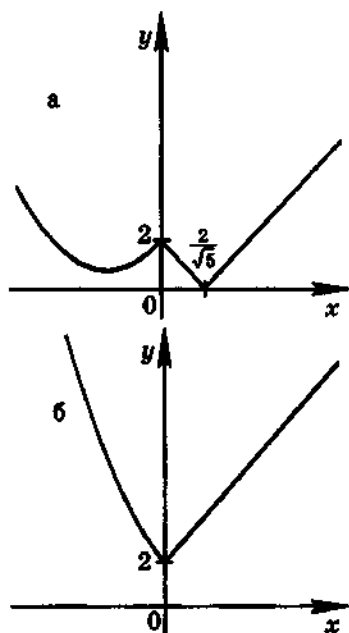


Рис. 34

2. Не всегда. Например, функции, графики которых могут быть, как на рис. 35. Объяснение в вар. 1.
3. Пусть T — точка на ломаной DCM (рис. 36). Пусть $DN \perp KT$ и $AP \perp KT$. Так как $AK = KD$, то $AP = DN$, но $AP = x$, значит, $DN = x$,

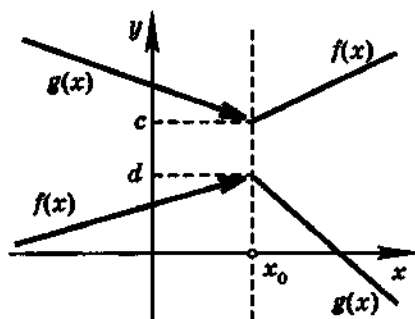


Рис. 35

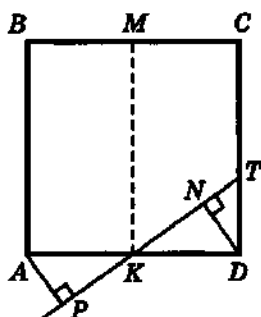


Рис. 36

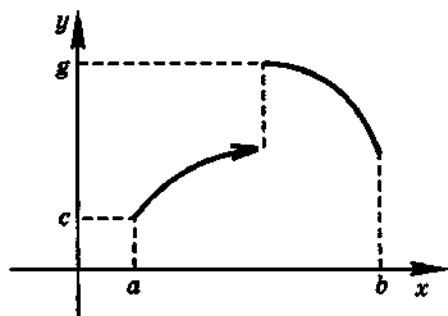


Рис. 37

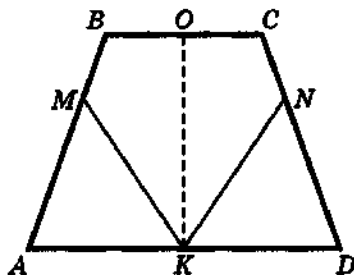


Рис. 38

и задача сводится к задаче из варианта 1. Функция $L(x)$ будет такой же, как в варианте 1.

4. Не всегда. Пример функции, имеющей точку разрыва и удовлетворяющей условию задачи, приведен графически на рис. 37.
5. Пусть $AK = KD$, $BM = CN$, $BO = CO$. Перемещая точку N по ломаной OCD (рис. 38), можно менять площадь фигуры KDN от 0 до $\frac{1}{2}S$, где S — площадь трапеции. Существует такое положение точки N , что площадь равна $\frac{1}{3}S$. Точка M симметрична N . Тогда площади трех фигур AMK , $MBOCNK$ и KDN равны.

Задание 2.6. Определение производной, ее геометрический и механический смысл, использование для приближенных вычислений

Вариант 1

1. а) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$; б) $f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 0, \\ -3x^2, & x \leq 0. \end{cases}$
2. $h'(x) = 2x + 1$, уравнение касательной в некоторой точке x_0 имеет вид $y = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$, в точке $x_0 = 1$ оно имеет вид $y = 3x$. Запишем теперь уравнение нормали $y = k_1x + b_1$. Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны, то $k_1k_2 = -1$. И наоборот, если $k_1k_2 = -1$, то прямые перпендикулярны. Значит, в нашем случае $3 \cdot k_1 = -1$, $k_1 = -\frac{1}{3}$. Нормаль $y = -\frac{1}{3}x + b_1$ проходит через точку $(1; 3)$. Подставив координаты этой точки, вычислим $b_1 = 3\frac{1}{3}$. Поэтому уравнение нормали $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.
3. Найдем приближенное значение функции $f(x) = \sqrt{1+x}$ при малых x . Для этого представим в виде $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$. Значит,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x. \text{ Используем это выражение для вычисления } \sqrt{100,5} = \\ = \sqrt{10^2(1+0,005)} = 10\sqrt{1+0,005} \approx 10(1 + \frac{0,005}{2}) = 10,025.$$

4. Площадь круга $S = \pi r^2$, где r — радиус.

а) Скорость роста площади равна производной. Поэтому $S'_r = 2\pi r$. Пусть $S'_r = 1$, тогда $2\pi r = 1$, но длина окружности равна $2\pi r$, значит, в искомый момент она равна 1.

б) В общем виде $S'_r = 2\pi r$. Длина окружности и есть скорость изменения площади круга.

Вариант 2

$$1. \text{ а) } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}; \quad \text{б) } f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 0, \\ 3x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

2. $h'(x) = 2x - 1$, отсюда уравнение касательной в точке $(1, 1)$ $y = x$, уравнение нормали имеет вид $y = kx + b$, где $k \cdot 1 = -1$, то есть $k = -1$, число b вычислим подстановкой координат точки $(1, 1)$ и получим, что уравнение имеет вид $y = -x + 2$.

3. Представим число 99,5 в виде $100 - 0,5 = 100(1 - 0,005)$. Используем результаты варианта 1:

$$\sqrt{99,5} = \sqrt{100 - 0,5} = \sqrt{10^2(1 - 0,005)} = 10\sqrt{1 - 0,005} \approx 10(1 - \frac{0,005}{2}) = 9,975.$$

4. а) Площадь квадрата $S = a^2$, где a — сторона. Скорость роста площади $S'_a = 2a$. Периметр равен $P = 4a$. Так как $S'_a = 2a = 1$, то $P = 2 \cdot 2a = 2$.

б) $P = 2S'_a$, $S'_a = \frac{P}{2}$. Скорость роста площади равна половине периметра.

Задание 2.7. Теоремы дифференцирования

Вариант 1

1. а) Для вычисления производной $f'(x)$ используем теоремы о дифференцировании суммы и произведения.

$$f'(x) = (x^2 - x + 1)'(x^2 + x - 1) + (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)' = \\ = (2x - 1)(x^2 + x - 1) + (x^2 - x + 1)(2x + 1) = 4x^3 - 2x + 2.$$

б) Нормаль к графику функции $y = f(x)$ перпендикулярна оси X в такой точке, в которой касательная к графику параллельна оси X . Значит, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 + x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1 + x(x - 1)) = 0, (x + 1)(2x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

в) Тангенс угла наклона касательной в некоторой точке равен производной функции в этой точке, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Если $\operatorname{tg} \alpha > 0$, то угол касательной с осью OX — острый, если $\operatorname{tg} \alpha < 0$, то угол — тупой. Опре-

делим знак $f'(x)$ при $x > 0$. $f'(x) = 4x^3 - 2x + 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x + 1)$. При $x > 0$ $x+1 > 0$, и так как дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 - 2x + 1$ отрицательный, то $2x^2 - 2x + 1 > 0$. Поэтому $f'(x) > 0$ при $x > 0$. И значит, $\operatorname{tg} \alpha > 0$ и угол — острый.

- Скорость в некоторый момент t равна производной $x'(t)$. $x'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \leq 1$ при любом $t \geq 0$.
- Производная функции вида $y = x^a$ равна αx^{a-1} . Используя это, можно написать $H(x) = \frac{x^3}{3} + x + C$, где C — некоторая постоянная, которую определим из условия $H(0) = -1$. Поэтому, $H(x) = \frac{x^3}{3} + x + 1$.

Вариант 2

- а) $f'(x) = (x^2 - x - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)' = 4x^3 - 2x - 2$.
б) Нормаль к графику функции перпендикулярна к оси X в точках, в которых $f'(x) = 0$. Значит, они определяются из уравнения $4x^3 - 2x - 2 = 0$. Разложив его на множители, получим

$$(x-1)(2x^2 + 2x + 1) = 0.$$

Решение: $x = 1$.

в) Определим знак производной $f'(x)$ при $x < 0$. Так как $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, где α — угол, образованный касательной в точке x и осью X , по знаку производной определим, какой угол, тупой или острый. $f'(x) = (x-1)(2x^2 + 2x + 1) = 0$ (см. (б)). При $x < 0$ $f'(x) < 0$, поэтому $\operatorname{tg} \alpha < 0$ и угол — тупой.

- Скорость $v(t) = x'(t) = \frac{5}{(t+2)^2} < 2$ при $t \geq 0$.
- $H(x) = -\frac{x^3}{3} + x + 1$.

Задание 2.8. Дифференцирование операций и сложной функции

Вариант 1

- Используем теорему о дифференцировании сложной функции: $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. И так как $f'(x) = \frac{2}{x^2}$, то $g'(x) = \frac{2}{(1-\frac{2}{x})^2} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{4}{(x-2)^2}$. Этот результат можно получить и непосредственно дифференцируя функцию: $g(x) = 1 - \frac{2}{1-\frac{2}{x}} = 1 - \frac{2x}{x-2} = -1 - \frac{4}{x-2}$.
- Можно представить функцию $g(y)$ в виде $g(y) = 1 + \frac{1}{y^2+y}$. $g(y)$ — сложная функция: $g(y) = 1 + f(t(y))$, где $f(t) = \frac{1}{t}$, $t(y) = y^2 + y$. Производ-

ная $g'(y) = f'(t(y)) \cdot t'(y) = -\frac{1}{(y^2+y)^2} \cdot (2y+1)$. Производная $g'(y)$ отрицательна при $y > -\frac{1}{2}$, $y \neq 0$, в этом можно убедиться, решив неравенство $g'(y) < 0$.

3. Пусть в искомом треугольнике ABC $BK \perp AC$, $AB = BC = 1$, $AC = x$, $BK = h$ (рис. 39). Тогда из треугольника ABK имеем

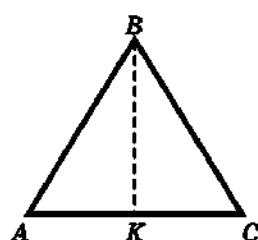


Рис. 39

$h = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$. Площадь треугольника ABC $S_{ABC} = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4} x$, по известной формуле $S = \frac{1 \cdot 1 \cdot x}{4R}$ ($S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где a, b, c — стороны, R — радиус описанной окружности), откуда $R = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, и скорость его роста $R' = \frac{x \cdot x'}{(\sqrt{4-x^2})^3}$, где x' —

скорость роста третьей стороны в момент, когда треугольник равносторонний, т. е. при $x = 1$. Значит $R' = \frac{x'}{(\sqrt{3})^3} = v \cdot 3^{-1.5}$.

4. Не всегда, например, $f = x^2 - |x|$, $g = x^2 + |x|$.
5. Представим $H(t)$ в виде $H(t) = f(t) \cdot g(t)$, где $f(t) = t$, $g(t) = (t+1)(t+2) \dots (t+100)$.
 $f(0) = 0$, $g(0) = 100!$. $H'(t) = g(t) \cdot f'(t) + g'(t) \cdot f(t)$, тогда
 $H'(0) = g(0) \cdot f'(0) + g'(0) \cdot f(0) = 100!$.

Вариант 2

1. $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$.
2. $g'(y) = -\frac{1}{(y^2-y)^2} \cdot (2y-1) < 0$ при $y > \frac{1}{2}$ и $y \neq 1$.
3. Для скорости изменения радиуса R используем формулу, полученную в варианте 1 (рис. 39), $R' = \frac{x \cdot x'}{(\sqrt{4-x^2})^3}$, вводя те же обозначения.

В тот момент, когда треугольник прямоугольный, $x = AC = \sqrt{2}$ и поэтому $R' = 0,5v$.

4. Не всегда, например, $|x| - x^2$ и $|x| + x^2$.
5. Представим $H(t)$ в виде $H(t) = g(t) \cdot f(t)$, где $g(t) = t$, $f(t) = (t-1)(t-2) \dots (t-100)$.
 $g(0) = 0$, $f(0) = 100!$. $H'(t) = g'(t) \cdot f(t) + g(t) \cdot f'(t)$.
 $H'(0) = g'(0) \cdot f(0) + g(0) \cdot f'(0) = 100!$

Задание 2.9. Исследование функции на монотонность

Вариант 1

1. $f'(x) = (\frac{3}{x} + x)' = 1 - \frac{3}{x^2}$. Функция $f(x)$ возрастает на тех промежутках, где $f'(x) > 0$, что равносильно $1 - \frac{3}{x^2} > 0$. Решая неравенство, определяем, что при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ функция возрастает. Функция убывает на промежутках $x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (0; \sqrt{3})$.
2. $x'(t) = 3at^2 + a = a(3t^2 + 1)$. Знак производной $x'(t)$ зависит только от знака a . Поэтому функция возрастает на R при $a > 0$.
3. Перепишем неравенство в виде $g(x) = \frac{2x\sqrt{x-3x+1}}{x}$, $g(x) \geq 0$. При $x = 1$ $g(x) = 0$, и неравенство верно. При $x > 1$ определим знак $g'(x)$. $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{x^2}$. При $x > 1$ $g'(x) > 0$ и функция $g(x)$ возрастает, поэтому при $x > 1$ $g(x) > g(0) = 0$.

Вариант 2

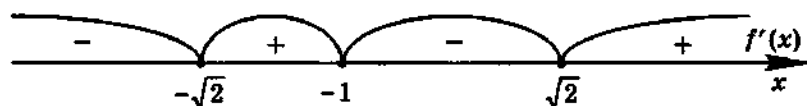
1. Функция $f(x)$ возрастает на тех промежутках, на которых $f'(x) > 0$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. $f'(x) > 0$ при $|x| > 1$, поэтому на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает. Функция убывает на промежутках $(-1; 0)$ и $(0; 1)$.
2. Функция возрастает на R , если $x'(t) > 0$. $x'(t) > 5at^4 + a = a(5t^4 + 1) > 0$ на R , если $a > 0$.
3. Перепишем неравенство в виде $g(x) \geq 0$, где $g(x) = 3\sqrt[3]{x^2 + \frac{2}{x}} - 1$. $g(1) = 4$. $g'(x) = 2 \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1}{x^2}$. При $x > 1$ и $g'(x) > 0$, поэтому при $x > 1$ функция $g(x)$ возрастает. При $x > 1$ $g(x) > g(1) = 4$, значит, $g(x) \geq 0$ при $x \geq 1$. Это утверждение можно доказать иначе. Перепишем исходное неравенство в виде $3\sqrt[3]{x^2 + \frac{2}{x}} \geq 1$. Так как при $x \geq 1$ $3\sqrt[3]{x^2} \geq 1$ и $\frac{2}{x} > 0$, то неравенство верно при всех $x \geq 1$.

Задание 2.10. Исследование функции на экстремум, наибольшее и наименьшее значения

Вариант 1

1. а) Вычислим производную $f'(x)$.
 $f'(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^2 - 2) = (x+1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

Производная равна 0 при $x = -1$, $x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$. Это точки экстремума. Решив неравенство $f'(x) > 0$, можно построить на числовой оси схему для значений $f'(x)$.

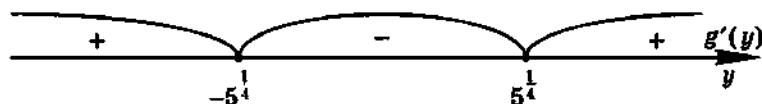


Точка $x = -1$ — точка максимума, так как $f'(-1) = 0$ и $f'(x) < 0$, если $x > -1$, $f'(x) > 0$, если $x < -1$; при x , принадлежащих небольшой окрестности точки $x = -1$, $f(-1) = -11\frac{1}{12}$ — максимальное значение функции. Точки $x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$ — точки минимума, так как в этих точках производная обращается в 0 и меняет знак в этих точках с $\leftarrow$ на $\rightarrow$.

$f(-\sqrt{2}) = -13 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = -13 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$ — это значения функции в точках минимума, наименьшее значение функции $f(\sqrt{2}) = -13 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Так как функция неограниченная, то наибольшего значения нет.

б) Производная $g'(y) = 5y^4 - 1$. Вычислим корни производной из уравнения $5y^4 - 1 = 0$, это $y = \pm 5^{\frac{1}{4}}$. Решим неравенства $g'(y) > 0$ и $g'(y) < 0$. $g'(y) > 0$ равносильно $5y^4 - 1 > 0$, $(\sqrt[4]{5}y^2 - 1)(\sqrt[4]{5}y^2 + 1) > 0$ или $(\sqrt[4]{5}y - 1)(\sqrt[4]{5}y + 1) > 0$. Решая, находим, что при $y < -\sqrt[4]{5}$ или $y > \sqrt[4]{5}$ $g'(y) > 0$. Аналогично решаем $g'(y) < 0$. Схема для производной:



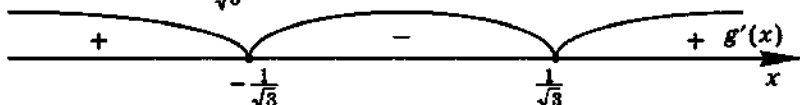
Так как $g'(5^{\frac{1}{4}}) = 0$ и производная меняет знак с $\leftarrow$ на $\rightarrow$, точка $x = 5^{\frac{1}{4}}$ — точка минимума, $g(5^{\frac{1}{4}}) = 5^{\frac{5}{4}} - 5^{\frac{1}{4}} - 1$. Точка $x = -5^{\frac{1}{4}}$ — точка максимума, $g(-5^{\frac{1}{4}}) = -5^{\frac{5}{4}} + 5^{\frac{1}{4}} - 1$. Вычислим значения функции на концах промежутка: $g(1) = -1$ и $g(4) = 1019$. Сравнивая числа $g(-5^{\frac{1}{4}})$, $g(5^{\frac{1}{4}})$, $g(1)$ и $g(4)$, определяем, что наименьшее значение функции $-5^{\frac{5}{4}} + 5^{\frac{1}{4}} - 1$, наибольшее значение 1019.

в) $x(t) = \frac{t+1}{t-1} = \frac{t-1+2}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1}$, $x'(t) = -\frac{2}{(t-1)^2} < 0$. Функция убывает при $t \in [0; 1)$ и $t \in (1; 2]$. Экстремальных точек нет. $x(0) = -2$, $x(2) = -2$. Наибольшего и наименьшего значений нет.

2. Пусть основание треугольника равно x , а боковые стороны равны y , тогда $x + 2y = 2$. При этом $0 < x < 1$. Площадь треугольника

$S = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot \frac{x}{2} = \sqrt{1-x} \cdot \frac{x}{2}$, $S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x} - \frac{x}{4\sqrt{1-x}}$. Определим точки, где производная обращается в 0. $S'(x)=0$, откуда получаем $x = \frac{2}{3}$. При $x < \frac{2}{3}$ $S'(x) > 0$ и при $x > \frac{2}{3}$ $S'(x) < 0$, поэтому при $x = \frac{2}{3}$ значение $S(x)$ наибольшее. При $x = \frac{2}{3}$ $y = \frac{2}{3}$, значит, искомый треугольник равносторонний.

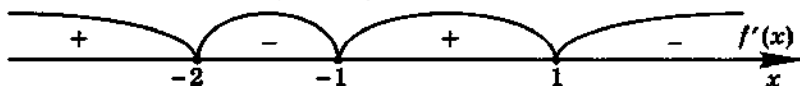
3. Пусть $g(x) = x^3 - x + 1$, тогда $g(0) = -1$. Вычислим производную $g'(x) = 3x^2 - 1$ и определим точки экстремума из уравнения $3x^2 - 1 = 0$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.



При $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{3}} > 0$ — это наименьшее значение функции при положительных x . Действительно, $f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$, и в точке $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с $\leftarrow$ на $\rightarrow$. И так как наименьшее значение функции при положительных x больше 0, функция не имеет положительных корней. Значит, исходное уравнение тоже не имеет положительных корней.

Вариант 2

1. а) Найдём экстремальные точки из уравнения $f'(x) = 0$, $-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$. Это уравнение можно решить разложением многочлена на множители. $(x+2)(x^2-1) = 0$, $(x+2)(-x+1)(x+1) = 0$. Экстремальные точки $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$.



Максимальные значения $f(-2) = 6\frac{1}{3}$, $f(1) = 8\frac{7}{12}$. Минимальное значение $f(-1) = 5\frac{11}{12}$. Наибольшее значение $f(1) = 8\frac{7}{12}$. Наименьшего значения нет.

- б) Экстремальные точки найдём из уравнения $g'(y) = 0$, что равносильно уравнению $5y^4 - 2 = 0$, решения которого $y = \pm(\frac{2}{5})^{\frac{1}{4}}$. Так как $-(\frac{2}{5})^{\frac{1}{4}} < 1$, то внутри промежутка одна экстремальная точка $y = (\frac{2}{5})^{\frac{1}{4}}$, $g(\frac{2}{5})^{\frac{1}{4}} = (\frac{2}{5})^{\frac{5}{4}} - \frac{4}{5} + 1 = (\frac{2}{5})^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{5}$. Найдём значения функции на концах промежутка: $g(1) = 0$ и $g(3) = 238$. Наименьшее значение функции на промежутке $y \in [1; 3]$ $g(1) = 0$ и наибольшее значение $g(3) = 238$.

в) $x(t) = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}$, $x'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} > 0$ при $t \neq -1$. Функция возрастает при $t \in [-2; -1)$ и $t \in (-1; 0]$. Экстремальных точек, наибольшего и наименьшего значений нет.

2. Пусть основание треугольника x , а боковые стороны равны y . Тогда высота, проведенная к основанию, равна $\sqrt{y^2 - (\frac{x}{2})^2}$. Площадь треугольника $S = \frac{x \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = \frac{x \sqrt{4y^2 - x^2}}{4} = 1$. Из этого уравнения $y = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}}$.

Периметр равен $P = x + 2y = x + 2\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}}$. Для того чтобы найти наименьшее значение периметра, приравняем к нулю производную периметра $P'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}}} (\frac{x}{2} - \frac{8}{x^3}) = 0$. Это уравнение принимает

вид $x^2 \sqrt{x^4 + 16} = 16 - x^4$, решим его возведением в квадрат при $x \leq 2$. $x^8 + 16x^4 = x^8 - 32x^4 + 256$, $x^4 = \frac{16}{3}$. Из этого уравнения $x^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$,

значит, $y^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, треугольник равносторонний.

3. Уравнение запишем в виде $g(x) = x^3 - x - 1 = 0$, $g(0) = -1$. Покажем, что функция $g(x)$ при $x \leq 0$ принимает наибольшее значение $g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} < 0$. Действительно, $g'(x) = 0$ при $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная равна 0 и меняет знак с $\leftarrow +$ на $\leftarrow -$. Так как наибольшее значение функции при отрицательных x отрицательное, функция не может иметь отрицательных корней. Поэтому исходное уравнение тоже не имеет отрицательных корней.

Задание 2.11. Построение графиков функций

Вариант 1

1. Рис. 40.

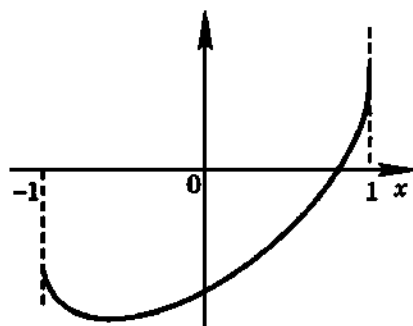


Рис. 40

2. Рис. 41.

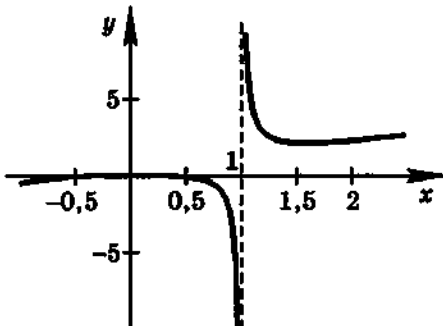


Рис. 41

Вариант 2

1. Рис. 42.

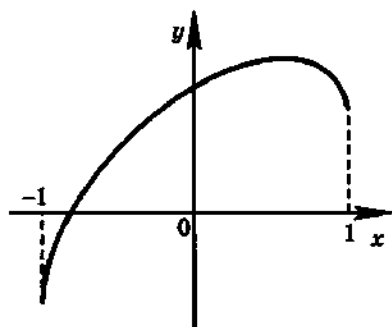


Рис. 42

2. Рис. 43.

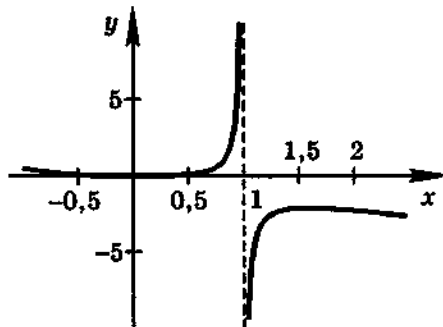


Рис. 43

Задание 2.12. Текстовые задачи на экстремум

Вариант 1

- Пусть стороны MH и AP равны x , а стороны AM и PH равны y (рис. 44). Пусть сторона треугольника a . Треугольники MBH и PNC тоже равносторонние. Поэтому $PC = HC = y$, $MP = BH = MN = x$. Тогда $AC = AP + PC = x + y = a$, сумма сторон параллелограмма тоже равна $x + y = a$. При этом $0 < x < a$. Так как острый угол параллелограмма 60° , то высота равна $y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь параллелограмма $S = \frac{x \cdot y \sqrt{3}}{2} = \frac{x(a-x)}{2} \sqrt{3}$. Определим, при каких x площадь наибольшая. Вычислим экстремальную точку. $S'(x) = 0$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(a - 2x) = 0$, откуда следует, что $x = \frac{a}{2}$. Это точка максимума, так как при $x < \frac{a}{2}$, $S'(x) > 0$, при $x > \frac{a}{2}$, $S'(x) < 0$. В точке максимума достигается и наибольшее значение, так как $0 < x < a$ и других точек экстремума нет. При $x = \frac{a}{2}$ сторона $y = \frac{a}{2}$, значит, параллелограмм является ромбом, который имеет наибольшую площадь.

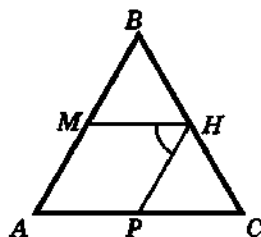


Рис. 44

- Нарисуем схему расположения объектов (рис. 45). Пусть в точке A — карьер, в точке B — станция, C — город. Вычислим стоимость перевозки по пути $A-K-C$, изображенному на рисунке. AK — участок пути по шоссе от точки A до K , находящейся на железной дороге. KC — участок железной дороги.

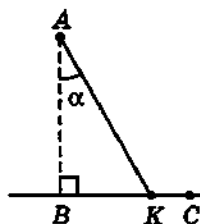


Рис. 45

участке $A-K-C$ будет $P(\alpha) = \left(-\frac{6}{\cos \alpha} + a - 3 \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot k$. Стоимость зависит

от угла, поэтому k можно не учитывать. Определим, при каких α она будет наименьшей. $P'(\alpha) = \frac{6 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{3}{\cos^2 \alpha} = \frac{3}{\cos^2 \alpha} (2 \sin \alpha - 1)$. Экстремальная точка определяется из уравнения $P'(\alpha) = 0$, что соответствует $2 \sin \alpha - 1 = 0$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, откуда получаем, что $\alpha = 30^\circ$.

При этом $BK = 3 \operatorname{tg} 30^\circ$. Наименьшее значение $P(\alpha)$ при $\alpha = 30^\circ$. Шоссе надо проложить следующим образом. Если расстояние $BC \leq \sqrt{3}$ км, то шоссе надо вести в город. Если $BC > \sqrt{3}$ км, то шоссе вести в ту точку железной дороги, которая на $\sqrt{3}$ км ближе к городу, чем проекция точки нахождения карьера на железную дорогу (эта точка совпадает со станцией).

Вариант 2

1. Пусть $AB = BC = a$, стороны параллелограмма x и y . $MA = HP = x$, $HM = AP = y$ (рис. 46). Тогда $BM = BH = a - x$, $y = HM = \sqrt{2}(a - x)$. Площадь параллелограмма $S_{AMHP} = x \cdot BH = x(a - x)$. Определим, при каком x площадь наибольшая. $S'_{AMHP} = a - 2x$. Из уравнения $S'_{AMHP} = 0$ определяется экстремальная точка $x = \frac{a}{2}$. При таком x действительно достигается наибольшее значение площади, так как $S'_{AMHP} = 0$ и производная в точке $x = \frac{a}{2}$ меняет знак с $++$ на $+-$.

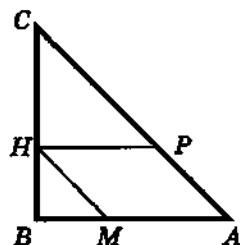


Рис. 46

При $x = \frac{a}{2}$ $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Параллелограмм с наибольшей площадью не является ромбом.

2. Нарисуем схему расположения объектов, обозначив через A точку, в которой находится лодочник, B — пристань, C — положение деревни. $AB \perp BC$. Задача теперь полностью сводится к задаче вар. 1 (рис. 45). Лодочнику надо вести лодку в ту точку берега озера ($BC > \sqrt{3}$ км), которая на $\sqrt{3}$ км ближе к деревне, чем проекция начального положения лодки на берег озера, или, если $BC \leq \sqrt{3}$ км, то в деревню.

Задание 2.13. Контрольное задание

Вариант 1

- График имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. Наклонная асимптота $y = x + 3$. Она определена следующим образом. Асимптота имеет уравнение $y = ax + b$, где $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

Вычислив пределы, получим приведенное уравнение асимптоты (рис. 47).

- Расстояние между графиками этих функций равно расстоянию между касательной к графику $y = x^4$, параллельной прямой $y = x - 1$, и самой прямой (рис. 48). Тангенс угла наклона прямой $y = x - 1$ равен 1, поэтому тангенс угла наклона касательной тоже равен 1, а так как тангенс угла наклона равен производной в точке касания, то $y' = (x^4)'|_{x=x_0} = 4x_0^3$; x_0 — абсцисса точки касания, $4x_0^3 = 1$, откуда следует, что $x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Уравнение касательной:

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^4 + \left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \text{ или } y = x - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Вычислим расстояние между прямыми $y = x - 1$ и $y = x - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$. Если

точка касания $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}}\right)$, B — точка $(1, 0)$, C — точка $\left(\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}, 0\right)$ —

точка пересечения касательной с осью абсцисс, то $\triangle ABC$ — прямоугольный и катет AB — искомое расстояние. Так как тангенс угла наклона касательной равен 1, то $\angle ACB = 45^\circ$ и $\triangle ABC$ — равнобедренный. $BC = 1 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$, значит, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\right) < 1$.

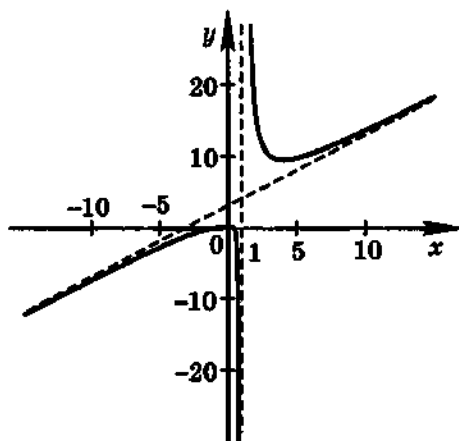


Рис. 47

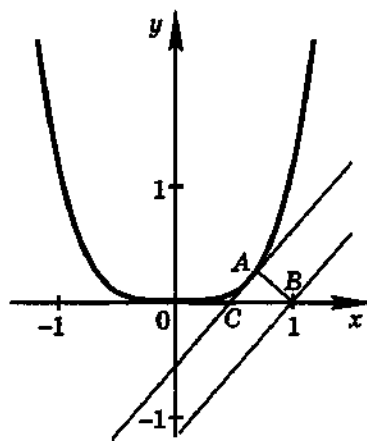


Рис. 48

3. По теореме Виета $x_1 x_2 = a$, $x_1 + x_2 = a$. Тогда $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \times (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = a \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = a(a^2 - 3a) = H(a)$. Корни существуют, если дискриминант $a^2 - 4a \geq 0$, то есть при $a \leq 0$ или $a \geq 4$. Определим, как изменяется $H(a)$ при таких a . Найдем точки экстремума из уравнения $H'(a) = 0$, $3a^2 - 6a = 0$, откуда получаем, что $a = 0$, $a = 2$. Функция $H(a)$ на $(-\infty; 0]$ и на $[2; +\infty)$ возрастает, а на $[0; 2]$ убывает. Если $a < 0$ и $a > 4$, тогда $T(x)$ имеет два корня, область значений $H(a)$ есть $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.

Вариант 2

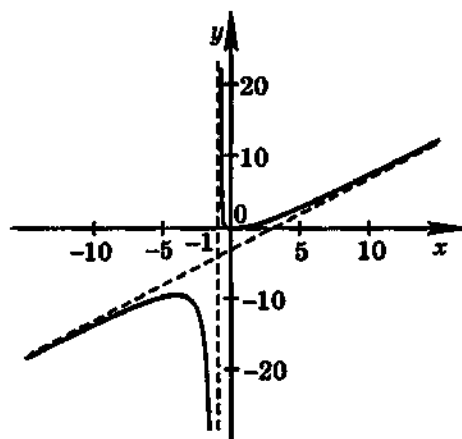


Рис. 49

1. Вертикальная асимптота $x = -1$, наклонная асимптота $y = x - 3$ (рис. 49).

2. Заметим, что если в условии задачи заменить x на $(-x)$, задача сведется к вар. 1. См. доказательство в вар. 1.

3. Область значений $H(a)$ есть $(-\infty; -16) \cup (0; +\infty)$. Результат можно получить заменой x на $(-x)$ в вар. 1. Поэтому меняется знак и сумма корней $H(a)$. См. решение вар. 1. Можно провести решение аналогично и без замены x .

Тема 3

ИНТЕГРАЛ И ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задание 3.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Вариант 1

1. Найдем первообразную для $F''(t)$, это будет $F'(t)$.
 $F'(t) = \int F''(t) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + C$, где C — постоянная,
 $F(t) = \int F'(t) dt = \frac{t^4}{12} - \frac{1}{2}t^3 + Ct + C_1$. Так как заданы значения функции в точках $t = 0$, $t = 1$, определим C и C_1 . $F(0) = C_1 = 1$, $F(1) = \frac{5}{6} = C_1 + C - \frac{5}{12}$, откуда получаем $C_1 = 1$, $C = \frac{1}{4}$. Так как задано еще значение в точке $t = -1$, проверим, не противоречит ли заданное

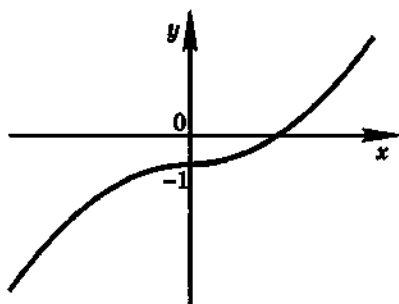


Рис. 50

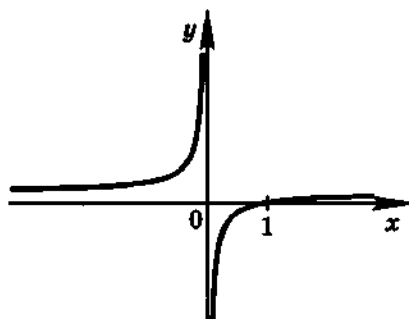


Рис. 51

значение $F(-1) = 1\frac{1}{8}$ вычисленному. Подставим $t = -1$ в выражение для $F(t)$ и получим, что $F(-1) = 1\frac{1}{8}$. Значит, первообразная существует. $F(2) = -\frac{7}{6}$.

2. $f(x) = |x|$. Первообразная $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C, & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + C, & x < 0. \end{cases}$ Для того чтобы

существовал положительный корень, постоянная C должна быть отрицательной. Например, первообразная с положительным

корнем: $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1, & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} - 1, & x < 0 \end{cases}$ (рис. 50).

3. Первообразная для функции $g(x)$ есть $G(x) = -\frac{1}{x} + C$.

а) Первообразная, проходящая через точку $(1, 0)$, есть

$$G(x) = -\frac{1}{x} + 1 \text{ (рис. 51).}$$

б) Так как $G'(x) = g(x)$ и $\operatorname{tg} \alpha = g(1) = 1$, то угол наклона касательной в точке $A(1; 0)$ равен $\alpha = 45^\circ$, поэтому нормаль к графику образует угол в 135° .

4. Уравнения полуокружностей:

$$y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}, \quad y = \sqrt{1 - (x - 3)^2}$$

(рис. 52). Значение первообразной для этой функции в некоторой точке из $0 \leq x \leq 4$ равно площади под графиком функции. Нетрудно вычислить значения первообразной в некоторых точках. Если $F(x)$ — пер-

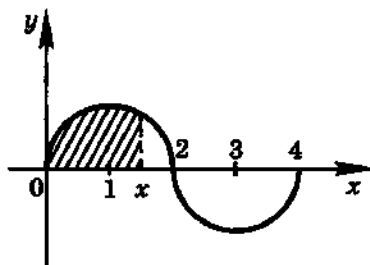


Рис. 52

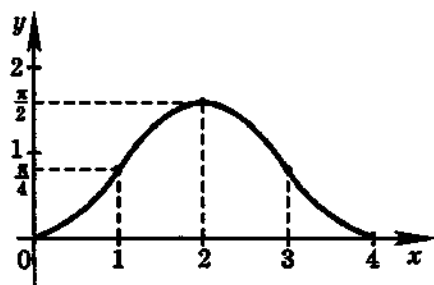


Рис. 53

вообразная, то $F(0)=0$, $F(1)=\frac{3}{4}$, $F(2)=\frac{3}{2}$, $F(3)=\frac{3}{4}$, $F(4)=0$.

Эскиз графика $y=F(x)$ приведен на рис. 53.

5. Условие можно переписать так: $\frac{x}{x} = \frac{y}{y}$. Найдем первообразные обеих частей равенства

$$\int \frac{x}{x} dt = \int \frac{y}{y} dt,$$

откуда получаем, что $\ln x = \ln y + C$, где C — некоторая постоянная. Последнее равенство можно переписать как $x = C \cdot y$. Траектория проходит через точку $(1; 2)$, поэтому траектория имеет вид $y = 2x$ — прямая.

Вариант 2

1. Задачу решаем аналогично вар. 1. $F'(t) = \int (t^2 + 3t) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 + C$,

$F(t) = \int F'(t) dt = \frac{t^4}{12} + \frac{1}{2}t^3 + Cx^2 + C_1$. Получили семейство первообразных.

Теперь для определения постоянных C и C_1 имеются 3 условия: $F(0) = 1$, $F(1) = \frac{3}{4}$, $F(-1) = -\frac{1}{4}$. Из первых двух условий вычисляем

$C_1 = 1$, $C = -\frac{5}{6}$. Тогда $F(-1) = -\frac{1}{4}$, что несовместимо с исходным условием.

Значит, не существует первообразной, удовлетворяющей условию задачи.

2. Первообразная $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C, & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + C, & x < 0. \end{cases}$ График первообразной,

имеющей отрицательный корень ($C = 1$), приведен на рис. 54.

3. а) Первообразная $G(x) = -\frac{1}{x} - 1$ проходит через точку $(-1; 0)$ (рис. 55).

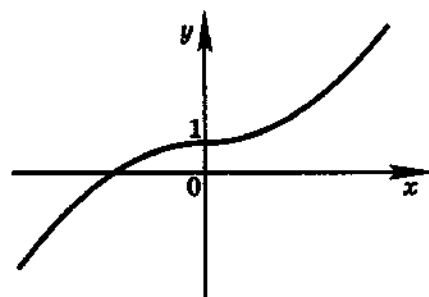


Рис. 54

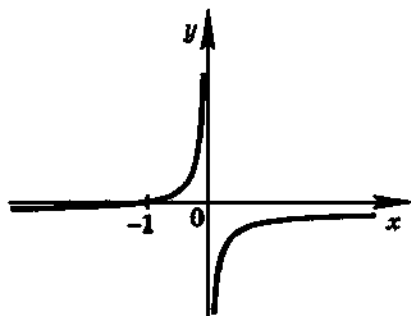


Рис. 55

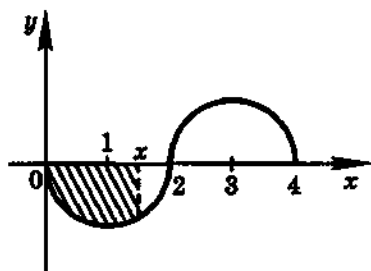


Рис. 56

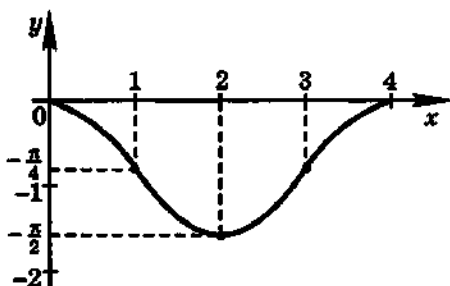


Рис. 57

- б) Так как $G'(x) = g(x)$, то $G'(-x) = 1$, угол наклона касательной в точке $x = -1$ равен 45° , угол наклона нормали равен 135° .
4. График функции приведен на рис. 56. Значение первообразной $F(x)$ в точке x равно площади под графиком исходной функции. Так как площадь в этой задаче есть площадь частей круга, то $F(0) = 0$, $F(1) = -\frac{\pi}{4}$, $F(2) = -\frac{\pi}{2}$, $F(3) = -\frac{\pi}{4}$, $F(4) = 0$. График функции $F(x)$ симметричен относительно прямой $x = 2$ (рис. 57).
5. Условие можно записать как $\frac{y'}{y} = -\frac{x}{x}$. Интегрируя это равенство, получим $\ln y = -\ln x + C$, значит, $x \cdot y = C$. Используя условие прохождения через точку $A(1; 2)$, получим уравнение линии $y = \frac{2}{x}$ — гипербола.

Задание 3.2. Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки

Вариант 1

- $\int (1-2y)^{15} dy = -\frac{1}{2} \int t^{15} dt = -\frac{1}{82} t^{16} + C = -\frac{1}{32} (1-2y)^{16} + C$. Здесь использовали подстановку $t = 1-2y$, при этом $dt = -2 dy$.
- $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^3)^{20}} = \frac{1}{3} \int t^{-20} dt = -\frac{1}{57} t^{-19} + C = -\frac{1}{57(1+z^3)^{19}} + C$. Здесь использовали подстановку $t = z^3 + 1$, при этом $dt = 3z^2 dz$.
- $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int \sqrt{z} dz = \frac{4}{3} \sqrt{z^3} + C = \frac{4}{3} \sqrt{(1+\sqrt{t})^3} + C$, использована подстановка $z = 1 + \sqrt{t}$, $dz = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.
- После подстановки $t = x + 2$, $dt = dx$ интеграл примет вид

$$\int (t-1)t^{10} dt = \int t^{11} dt - \int t^{10} dt = \frac{1}{12} t^{12} - \frac{1}{11} t^{11} + C.$$

Искомый интеграл получаем из вычисленного, используя ту же подстановку, поэтому

$$\int (x+1)(x+2)^{10} dx = \frac{1}{12}(x+2)^{12} - \frac{1}{11}(x+2)^{11} + C = \frac{1}{132}(x+2)^{11}(11x+10) + C.$$

5. $\int \frac{\sqrt{2-y^2}}{y^4} dy = \int \frac{\sqrt{\frac{2}{y^2}-1}}{y^4} dy = \int \frac{\sqrt{\frac{2}{y^2}-1}}{y^3} dy$. Заметим, что $\left(\frac{2}{y^2}-1\right)' = -\frac{4}{y^3}$, и если сделать замену $t = \frac{2}{y^2}-1$, $dt = -\frac{4}{y^3}$, то интеграл примет вид $-\frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt$, который легко вычисляется и равен $-\frac{1}{6} t^{\frac{3}{2}}$. После подстановки t через y искомый интеграл будет равен

$$-\frac{1}{6} \left(\frac{2}{y^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{y^3} (2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Вариант 2

1. $\int (1 - 0,5 y)^{15} dy = -2 \int t^{15} dt = -\frac{2}{16} t^{16} + C = -\frac{1}{8} (1 - \frac{y}{2})^{16} + C$. Использована замена $t = 1 - 0,5 y$, $dt = -0,5 dy$.

2. $\int \frac{z^3 dz}{(1+z^4)^{20}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^{20}} = -\frac{1}{76 t^{19}} + C = -\frac{1}{76} (1+z^4)^{-19} + C$. Использована замена $t = z^4 + 1$, $dt = 4z^3 dz$.

3. $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = -2 \int \sqrt{z} dz = -\frac{4}{3} z^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{4}{3} (1 - \sqrt{t})^{\frac{3}{2}} + C$.

Использована замена $z = 1 - \sqrt{t}$, $dz = -\frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

4. $\int (x+1)^{10}(x+2) dx = \int ((x+1)^{11} + (x+1)^{10}) dx = \int (t^{11} + t^{10}) dt = \frac{t^{12}}{12} + \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{132} (x+1)^{11} (11x+23) + C$. Замена $t = x+1$, $dt = dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{3-y^2}}{y^4} dy = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{y^2}-1}}{y^4} dy = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{y^2}-1}}{y^3} dy = -\frac{1}{6} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{9} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{9} \left(\frac{3}{y^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + C$. Сделана замена $t = \frac{3}{y^2} - 1$, $dt = -\frac{6}{y^3}$.

Задание 3.3. Нахождение неопределенного интеграла с использованием алгебраических преобразований

Вариант 1

1. а) $\int \frac{16-x}{2\sqrt{x+8}} dx = \int \frac{(4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x+4})} dx = \frac{1}{2} \int (4 - \sqrt{x}) dx = 2x - \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

$$6) \int \frac{x^3+x-2}{x-1} dx = \int \frac{x^3-1+x-1}{x-1} dx = \int (x^2+x+1) dx + \int 1 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

$$B) \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \int (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$r) \int \frac{t^2-t}{(2t-1)^4} dt = \int \frac{(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}{16(t-\frac{1}{2})^4} dt = \frac{1}{16} \int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{64} \int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^4} = -\frac{1}{16(t-\frac{1}{2})} + \frac{1}{64 \cdot 3} \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^3} + C = -\frac{1}{8(2t-1)} + \frac{1}{24(2t-1)^3} + C = \frac{-6t^2+6t-1}{12(2t-1)^3} + C.$$

$$\begin{aligned} 2. F(x) &= \int \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-1} dx = \\ &= \int \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^3}}{\sqrt{x-1}-1} dx = \int \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}-1} dx = \\ &= \begin{cases} -x + C_1, & \text{если } 1 \leq x < 2, \\ x + C_2, & \text{если } x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Первообразная, график которой проходит через точку (5; 1) (рис. 58):

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x < 2, \\ x - 4, & x > 2. \end{cases}$$

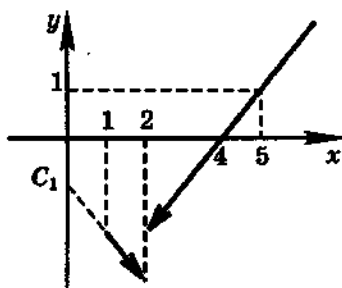


Рис. 58

Вариант 2

$$1. a) \int \frac{x-25}{3\sqrt{x+15}} dx = \int \frac{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})}{3(\sqrt{x+5})} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{x} dx - \frac{5}{3} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{3} x + C.$$

$$\begin{aligned} 6) \int \frac{x^3-2x+1}{x-1} dx &= \int \frac{x^3-x-(x-1)}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x(x+1)-1)}{x-1} dx = \int (x^2+x-1) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

$$B) \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \int (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) dx = \frac{2}{3} (x^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}) + C.$$

$$\begin{aligned} r) \int \frac{t^2+t}{(2t+1)^4} dt &= \int \frac{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}{16(t+\frac{1}{2})^4} dt = \frac{1}{16} \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{64} \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^4} = -\frac{1}{16(t+\frac{1}{2})} + \\ &+ \frac{1}{64 \cdot 3} \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^3} + C = -\frac{1}{8(2t+1)} + \frac{1}{24(2t+1)^3} + C = \frac{-6t^2-6t-1}{12(2t+1)^3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) &= \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1-2}\sqrt{x-1+1}}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{|1-\sqrt{x-1}|}{1-\sqrt{x-1}} = \\ &= \begin{cases} -1, & x > 2, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Первообразная } F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x > 2, \\ x + C_2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

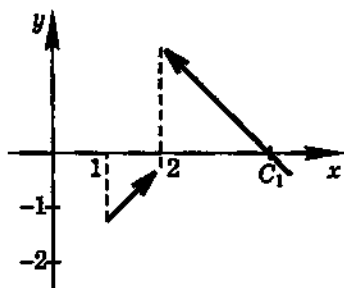


Рис. 59

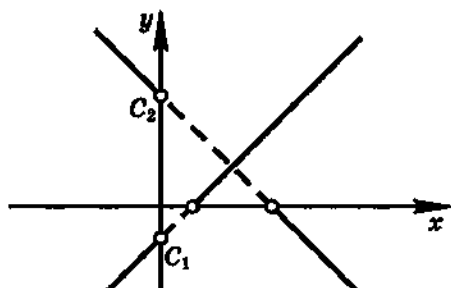


Рис. 60

Первообразная, график которой проходит через точку $(1, 25; -1)$ (рис. 59): $F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x > 2, \\ x - 2,25, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$

Задание 3.4. Интегральные кривые

Вариант 1

1. Условие можно записать так: $y' = \begin{cases} 1, & xy > 0, \\ -1, & xy < 0. \end{cases}$

Тогда $y = \begin{cases} x + C_1, & xy > 0, \\ -x + C_2, & xy < 0 \end{cases}$ (рис. 60).

2. Так как $(y^2)' = 2y \cdot y'$, исходное уравнение можно записать так:

$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = x$, откуда $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$, и так как $y(0) = 0$, то $y^2 = x^2$, т. о. получаем прямые $|y| = |x|$ (рис. 61).

3. Уравнение запишем в виде $\frac{y'}{y} = \frac{1}{1-x}$, откуда получаем $(\ln y)' = \frac{1}{1-x}$, $\ln y = -\ln(x-1) + C$, $y(x-1) = C$, уравнение интегральной кривой $y = \frac{C}{x-1}$ (рис. 62).

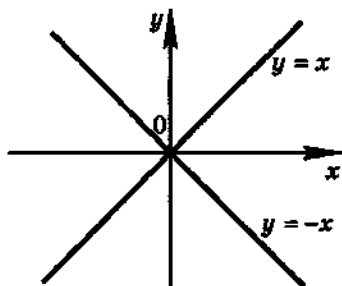


Рис. 61

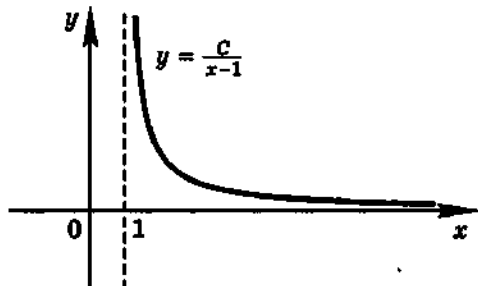


Рис. 62

Вариант 2

1. Уравнение запишем в виде

$$y' = \begin{cases} 1, & xy > 0, \\ -1, & xy < 0, \end{cases} \text{ решение которого } y = \begin{cases} x + C_1, & xy > 0, \\ -x + C_2, & xy < 0 \end{cases}$$

(рис. 63).

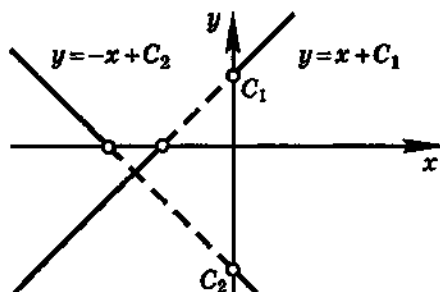


Рис. 63

2. Так как $(y^2)' = 2yy'$, то уравнение можно записать в виде

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = -x, \text{ решение его есть}$$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$. Учитывая начальное условие, $y^2 + x^2 = 1$. Нетрудно узнать это уравнение — уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 64).

3. Так как $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, то уравнение примет вид $(\ln y)' = \frac{1}{1-x}$, решение его $\ln y = -\ln(1-x) + C$ или $y = \frac{C}{1-x}$ — это уравнение гиперболы (при $x < 1$) (рис. 65).

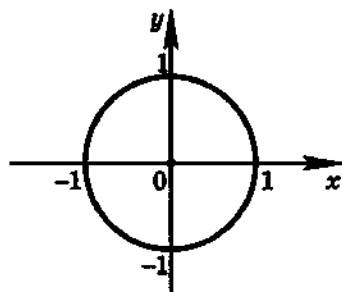


Рис. 64

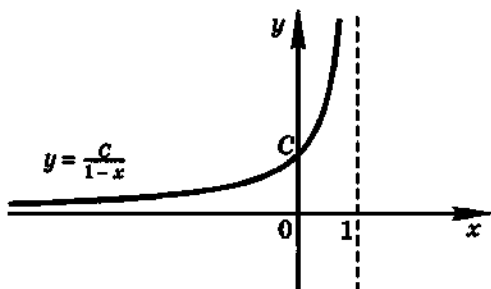


Рис. 65

Задание 3.5. Вычисление определенного интеграла

Вариант 1

1. а) Подынтегральная функция $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$ имеет разрыв в точке $x = 1$.

Интеграл не существует.

б) $\int_{-1}^1 \frac{y^3 + y^2 + 1}{y^2 + 1} dy = \int_{-1}^1 \frac{y^3}{y^2 + 1} dy + \int_{-1}^1 1 dy = 0 + y \Big|_{-1}^1 = 2$, так как $\int_{-1}^1 \frac{y^3}{y^2 + 1} dy = 0$

как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку.

в) Подинтегральная функция $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$ Поэтому интеграл существует при $a \cdot b > 0$. Если $a < 0, b < 0$, то $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = a - b$; если $a > 0, b > 0$, то $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = b - a$.

2. $\int_a^{a^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_a^{a^2} = \frac{2}{3} a^3 - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$. Этот интеграл равен $\frac{2}{3}$, если a удовлетворяет уравнению $\frac{2}{3} a^2 - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$, то есть $a^3 - a^{\frac{3}{2}} = 1$. Если обозначить $z = a^{\frac{3}{2}}$, то уравнение имеет вид $z^2 - z - 1 = 0$, решение его $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Так как $z = a^{\frac{3}{2}} > 0$, то $a^{\frac{3}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, откуда имеем $a = (0,5 + 0,5 \cdot \sqrt{5})^{\frac{2}{3}}$.

3. Продифференцируем обе части равенства по a , тогда $f(a) = 2a + 1$.

Здесь использовано $\left(\int_a^a f(x) dx \right)' = f(a) \cdot a' = f(a)$ — правило дифференцирования интеграла.

Вариант 2

1. а) Подинтегральная функция имеет особенность в точке $x = 1$, поэтому интеграл не существует.

б) $\int_{-1}^1 \frac{y^3 - y^2 - 1}{y^2 + 1} dy = \int_{-1}^1 \frac{y^3}{y^2 + 1} dy - \int_{-1}^1 1 dy = 0 - 2 = -2$, $\int_{-1}^1 \frac{y^3}{y^2 + 1} dy = 0$, так как подинтегральная функция нечетная и промежуток интегрирования симметричный.

в) Так как $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ то интеграл существует, если $a \cdot b > 0$, и равен $b - a$ при $b > a > 0$, $a - b$ при $a < b < 0$.

2. $\int_a^{a^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} (a^3 - a^{\frac{3}{2}})$. Требуемое в условии задачи равенство выполняется, если $\frac{2}{3} (a^3 - a^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3}$, то есть $a^3 - a^{\frac{3}{2}} - 2 = 0$, $(a^{\frac{3}{2}} - 2)(a^{\frac{3}{2}} + 1) = 0$, откуда имеем $a^{\frac{3}{2}} = 2 > 0$, $a = \sqrt[3]{4}$.

3. Дифференцируя равенство, определим, что $f(a) = 2a - 1$. Здесь использовано $\left(\int_a^a f(x) dx \right)' = f(a) \cdot a' = f(a)$ — правило дифференцирования интеграла.

Задание 3.6. Вычисление определенного интеграла с помощью замены переменной

Вариант 1

1. а) $\int_0^1 x(1-x^2)^{10} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{10} dt = \frac{1}{22}$, здесь произведена замена $t=1-x^2$, $dt = -2x dx$, $t(1) = 0$, $t(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+t-1) \sqrt{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}} dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \frac{1}{5} (1+t)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} 2^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} 2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15} (1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Здесь произведена замена $t = x^2$, $dt = 2x$.

2. а) Рассмотрим $\int_0^1 x^3(1-x)^2 dx$, сделаем замену $t=1-x$, тогда $dx = -dt$, $x=1-t$. Интеграл принимает вид $\int_0^1 t^2(1-t)^3 dt$ и равен первому интегралу.

б) Обобщение этого результата: $\int_0^1 x^n(1-x)^{n+1} dx = \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n dx$.

Действительно, если заменить $1-x=t$, $dt = -dx$, то второй интеграл примет вид $\int_0^1 (1-t)^{n+1} t^n dt$.

3. а) Если заменить $z=100t$, $dz=100dt$, то интеграл в знаменателе будет равен $\frac{1}{100} \int_0^{100} f(z) dz$, поэтому искомое выражение равно $\frac{\int_0^{100} f(t) dt}{\frac{1}{100} \int_0^{100} f(z) dz} = 100$.

б) Обобщение результата: $\frac{\int_0^a f(t) dt}{\int_0^a f(at) dt} = a, a > 0$.

Вариант 2

1. а) $\int_0^1 x(x^2-1)^{10} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (t-1)^{10} dt = \frac{1}{22} (t-1)^{11} \Big|_0^1 = -\frac{1}{22}$, произведена замена $t = x^2$, $dt = 2x dx$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 t \sqrt{1-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (t-1+1) \sqrt{1-t} dt = -\frac{1}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \\ &+ \frac{1}{5} (1-t)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

2. а) Интегралы равны. б) Обобщение см. в вар. 1.

3. а) 101. б) Обобщение см. в вар. 1.

Задание 3.7. Интеграл с переменным верхним пределом

Вариант 1

1. $f(x) = \int_0^x (1-t^2) dt = t \Big|_0^x - \frac{t^3}{3} \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3}$, поэтому $\int f(x) dx = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{x^2}{2} + C$.
2. Вычислим $\int_0^x (1-z^3) dz = x - \frac{x^4}{4}$. Тогда $F'(x) = x - \frac{x^4}{4}$. Экстремальные значения достигаются при таких x , при которых $F'(x) = 0$ или $x - \frac{x^4}{4} = 0$. Решая это уравнение, определяем, что точки экстремума $x = 0$, $x = \sqrt[3]{4}$. С учетом условия $F(0) = -1$ имеем $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} - 1$. Тогда экстремальные значения $F(0) = -1$, $F(\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{8} - \frac{\sqrt[3]{16}}{5} - 1$.
3. По теореме о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом: $\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Тогда $\left(\int_1^{\frac{x^2}{t^2+t+1}} \frac{dt}{t^2+t+1} \right)' = \frac{2x}{x^4+x^2+1}$.
4. Продифференцируем по x обе части равенства. Тогда $f(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$, если $f(x)$ отлично от 0, то $f'(x) = \frac{1}{2}$ и $f(x) = \frac{x}{2} + C$.
5. Производная $y'(x) = \frac{1}{1+x^6} > 0$. Функция $y(x)$ возрастает. $y''(x) = -\frac{6x^5}{(1+x^6)^2} < 0$. График функции выпуклый (рис. 66). Функцию $\int_0^x \frac{dt}{1+t^6}$ можно сравнить с функцией $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$. Для любого x $y(x) \leq \operatorname{arctg} x$. Функция ограничена, т. к. $\operatorname{arctg} x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow \infty$.

Вариант 2

1. $f(x) = \int_0^x (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^x - t \Big|_0^x = \frac{x^3}{3} - x$, $\int f(x) dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + C$.
2. $F'(x) = \int_0^x (1-z^3) dz = x - \frac{x^4}{4}$. Функция $F(x)$ достигает экстремальных значений при условии $F'(x) = 0$, из которого определяем, что $x = 0$, $x = \sqrt[3]{4}$ — точки экстремума. С учетом условия $F(0) = 1$ имеем $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + 1$. Тогда экстремальные значения $F(0) = 1$, $F(\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{16}}{5} + 1$.

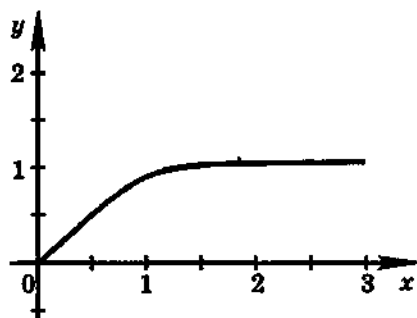


Рис. 66

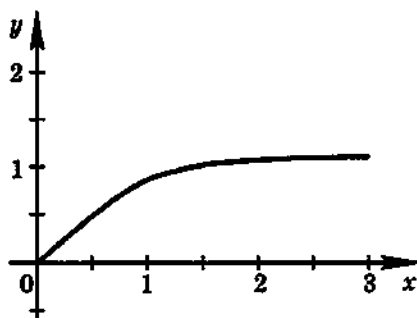


Рис. 67

3. $\left(\int_1^{2x} \frac{dt}{t^2 - t + 1} \right)' = \frac{2}{4x^2 - 2x + 1}$. См. вар. 1

4. Продифференцируем исходное равенство. Тогда $f(x) = -2f(x)f'(x)$. Так как $f(x)$ отлична от нуля, $f'(x) = -\frac{1}{2}$, откуда имеем $f(x) = -\frac{x}{2} + C$.

5. График $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$ приведен на рис. 67. См. вар. 1.

Задание 3.8. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

Вариант 1

1. Отраженная парабола удовлетворяет уравнению $y = (x - 6)^2$. Пусть S_1 — площадь фигуры, расположенной ниже $y = (x - 6)^2$, выше $y = x^2$, $0 \leq x \leq 3$. S_2 — площадь фигуры, расположенной ниже $y = (x - 6)^2$, ниже $y = x^2$, $0 \leq x \leq 6$. Вычислим площади S_1 и S_2 (рис. 68).

$$S_1 = \int_0^3 ((x - 6)^2 - x^2) dx =$$

$$= 12 \int_0^3 (3 - x) dx = 54;$$

$$S_2 = \int_0^3 x^2 dx + \int_3^6 (x - 6)^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 + \frac{(x - 6)^3}{3} \Big|_3^6 = 18.$$

$S_1 > S_2$. Наибольшая площадь равна 54.

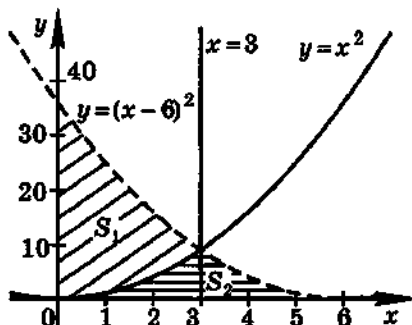


Рис. 68

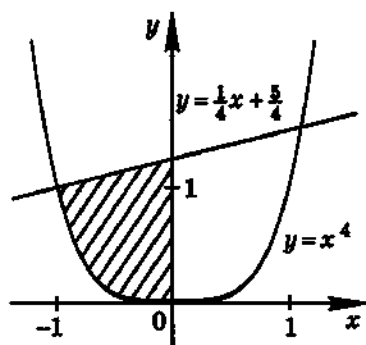


Рис. 69

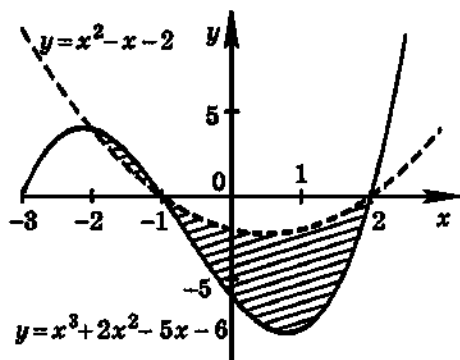


Рис. 70

2. Напишем уравнение нормали к графику в точке $x = -1$. Нормаль перпендикулярна к касательной в точке с абсциссой $x = -1$ (рис. 69). Уравнение касательной в этой точке $y = y(-1) + y'(-1)(x + 1)$. Подставив числовые значения, можно записать $y = -4x - 3$. Уравнение нормали $y = kx + b$, где $-4 \cdot k = -1$, число b определяется из условия, что точка $(-1; 1)$ лежит на нормали. Тогда уравнение нормали таково: $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$. Искомая площадь

$$S = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} - x^4 \right) dx = \frac{37}{40}.$$

3. Заметим, что

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x + 1)(x + 3)(x - 2) \text{ и} \\ x^2 - x - 2 &= (x - 2)(x + 1). \end{aligned}$$

Фигура, ограниченная графиками заданных функций, состоит из двух частей, часть от $x = -2$ до $x = -1$, часть от $x = -1$ до $x = 2$ (рис. 70).

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} ((x^3 + 2x^2 - 5x - 6) - (x^2 - x - 2)) dx + \\ &+ \int_{-1}^2 ((x^2 - x - 2) - (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)) dx = 11 \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Вариант 2

1. Отраженная парабола удовлетворяет уравнению $y = (x + 6)^2$. Пусть S_1 — площадь под графиками функций $y = x^2$ и $y = (x + 6)^2$ от $x = -6$ до $x = 0$, S_2 — площадь под графиком $y = (x + 6)^2$ и над графиком $y = x^2$ от $x = -3$ до $x = 0$ (рис. 71).

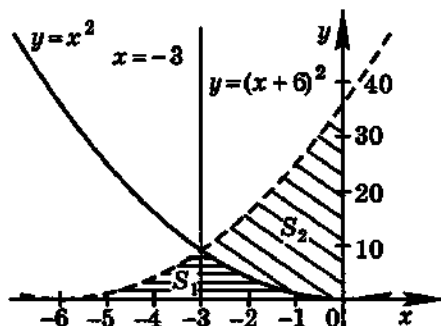


Рис. 71

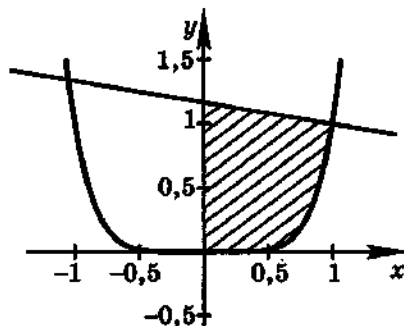


Рис. 72

$$S_1 = \int_{-6}^{-3} (x+6)^2 dx + \int_{-3}^0 x^2 dx = 18, \quad S_2 = \int_{-3}^0 ((x+6)^2 - x^2) dx = 54. \quad S_2 > S_1.$$

Наибольшая площадь равна 54. Этот вывод можно сделать и без вычисления площадей, так как графики парабол в этой задаче симметричны относительно оси OY параболом из задачи вар. 1; соответствующие площади равны.

2. Напишем уравнение касательной в точке $x = -1$. $y = 1 + 6(x - 1) = 6x - 5$. Нормаль перпендикулярна к касательной. Уравнение нормали $y = -\frac{1}{6}x + c$, число c определяется из условия $y(1) = 1$. Окончательно уравнение нормали $y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$. Построим графики функций $y = x^6$ и $y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$ (рис. 72).

Из двух фигур, ограниченных графиками $y = x^6$, $y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$ и прямой $x = 0$, меньшую площадь имеет фигура с $x \geq 0$. Площадь этой фигуры $S = \int_0^1 (-\frac{1}{6}x + \frac{7}{6} - x^6) dx = -\frac{1}{12}x^2 \Big|_0^1 + \frac{7}{6}x \Big|_0^1 - \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{79}{84}$.

3. $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$. Графики функций пересекаются в точках $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$ (рис. 73), поэтому площадь, ограниченная этими графиками, вычисляется по формуле

$$S = \int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6 - x^2 - x + 2) dx + \int_1^4 (x^2 + x - 2 - x^3 + 2x^2 + 5x - 6) dx = 40\frac{1}{2}.$$

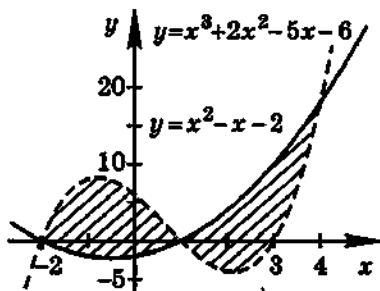


Рис. 73

**Задание 3.9. Вычисление определенного интеграла
с помощью площади**

Вариант 1

1. а) Рассмотрим уравнение $y = \sqrt{16 - x^2}$, откуда при $y \geq 0$ получим $y^2 + x^2 = 16$ — уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $r = 4$. Так как определенный интеграл есть площадь под графиком подынтегральной функции, искомый интеграл равен четверти площади круга ($x \geq 0, y \geq 0$). $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx = \frac{\pi 4^2}{4} = 4\pi$.

б) Построим график $y = |1 - z|$ при $0 \leq z \leq 3$. Искомый интеграл равен площади под графиком подынтегральной функции, которая равна сумме площадей двух прямоугольных треугольников (рис. 74). $\int_0^3 |1 - z| dz = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$.

2. Эти интегралы равны, так как функции x^5 и $\sqrt[5]{x}$ и x^3 и $\sqrt[3]{x}$ взаимно обратны, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$. На рис. 75 приведены графики этих функций и обозначены фигуры, площади которых равны значениям интегралов.

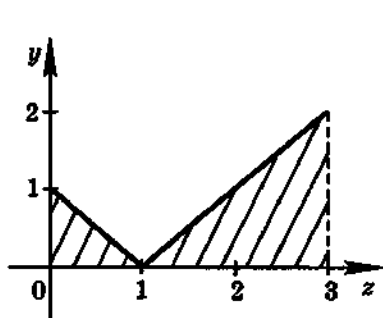


Рис. 74

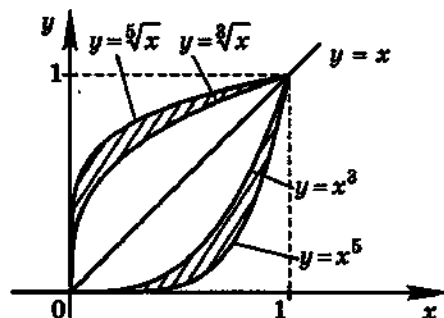


Рис. 75

3. Из условия задачи следует, что подынтегральная функция $g(x)$ имеет период $T = 1$. Поэтому сравниваемые интегралы равны.

В первом интеграле можно сделать замену $t = x - a$, тогда $\int_a^{a+1} f(x) dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx$.

4. График функции $z = f(y)$ при $k \neq 0$ представляет собой параболу. Так как искомый интеграл есть площадь под параболой, то для того

чтобы интеграл был больше нуля при любых a и b , необходимо и достаточно, чтобы парабола не пересекала ось OX и ветви параболы были направлены вверх, то есть дискриминант $1 - 4k^2 \leq 0$ и $k > 0$. Решая эту систему, определяем, что $k \geq \frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. а) Искомый интеграл равен $\frac{25\pi}{4}$ (рис. 76).

См. решение вар. 1.

б) $\int_0^3 |2 - z| dz = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ (рис. 77).

2. Интегралы равны, так как функции x^2 и $\sqrt{x}$ и x^4 и $\sqrt[4]{x}$ при $x \geq 0$ взаимно обратны и графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 78).

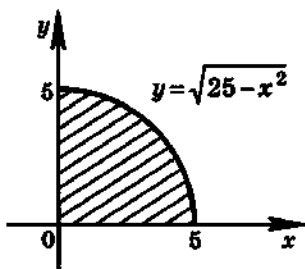


Рис. 76

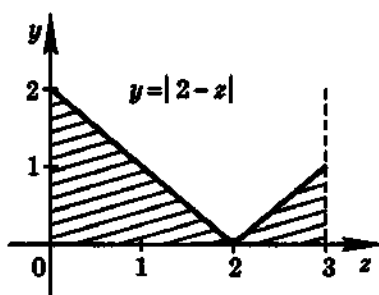


Рис. 77

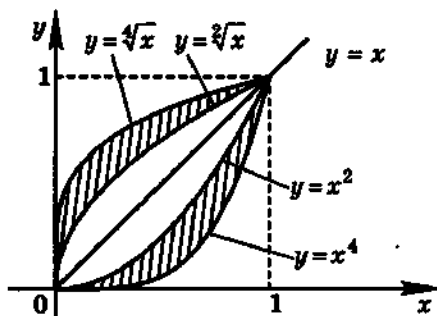


Рис. 78

3. Подинтегральная функция $g(x)$ имеет период $T=1$, поэтому интегралы равны. См. вар. 1.
4. График функции $z = f(y)$ при $k \neq 0$ — парабола. Поэтому, для того чтобы интеграл был меньше нуля при любом k , необходимо и достаточно, чтобы парабола пересекала ось OX и ветви ее были направлены вниз, то есть $1 - 4k^2 \leq 0$ и $k < 0$, откуда получаем, что $k \leq -0,5$.

Задание 3.10. Нахождение объема с помощью интеграла

Вариант 1

1. Построим фигуру, которую будем вращать (рис. 79):
а) при вращении ее вокруг оси X объем вычисляется так:

$$V_1 = \pi \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{16\pi}{15};$$

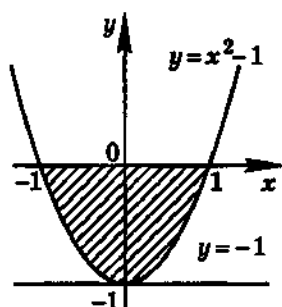


Рис. 79

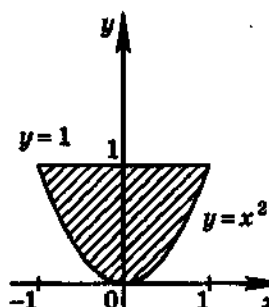


Рис. 80

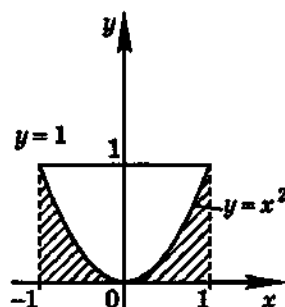


Рис. 81

б) при вращении ее вокруг оси Y объем вычисляется так:

$$V_2 = \pi \int_{-1}^0 x^2(y) dy = \pi \int_{-1}^0 (y+1) dy = \frac{\pi}{2};$$

в) при вращении ее вокруг прямой $y = -1$ получится такое же тело, как при вращении фигуры, ограниченной графиками $y = 1$ и $y = x^2$, вокруг оси X (рис. 80).

Рассмотрим фигуру, образованную графиком $y = x^2$, осью X и прямыми $x = -1$, $x = 1$ (рис. 81). Объем тела, полученного при вращении этой фигуры вокруг оси X , вычисляется так:

$$V_3 = \pi \int_{-1}^1 y^2 dx = \pi \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2\pi}{5}.$$

Сумма вычисленного объема и искомого объема V равна объему цилиндра, полученного вращением отрезка $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$ вокруг оси X (высота цилиндра 2, радиус 1), то есть $V_3 + V = 2\pi$. Откуда получаем искомый объем $V = 2\pi - V_3 = 2\pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$.

2. Введем систему координат так. Круг лежит в плоскости XY , его центр совпадает с началом координат, диаметр лежит на оси X и любое сечение, перпендикулярное к этому диаметру (рис. 82а), —

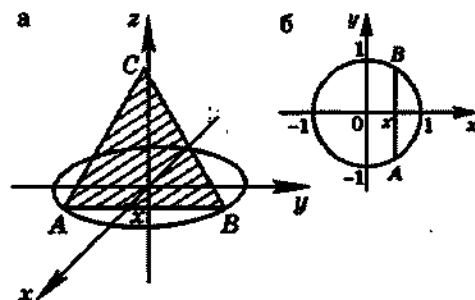


Рис. 82

равносторонний треугольник с площадью $S(x)$ (x — координата сечения) (рис. 82б). При фиксированном x длина хорды AB равна $2\sqrt{1-x^2}$, это есть сторона треугольника. Тогда $S(x) = \sqrt{3}(1-x^2)$.

$$\begin{aligned} \text{Объем тела } V &= \int_{-1}^1 S(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-x^2) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

3. Может. Например, тело, образованное вращением графика $y = \frac{x}{2\sqrt{x^6+1}}$. Действительно, при любом a и $b > a$, объем тела равен

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_a^b \frac{x^2 dx}{(x^6+1)} = \frac{\pi}{12} \int_a^b \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\pi}{12} \operatorname{arctg} z \Big|_a^b = \frac{\pi}{12} (\operatorname{arctg} b^3 - \operatorname{arctg} a^3).$$

При вычислении интеграла сделана замена переменной $z = x^3$, $dz = 3x^2 dx$. Так как при любом a и b $\operatorname{arctg} b^3 - \operatorname{arctg} a^3 < 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$, то объем $V < \frac{\pi}{12} < \pi$.

Вариант 2

1. а) Искомый объем такой же, как и в вар. 1, так как график $y = -x^2 + 1$ есть отражение относительно оси X графика $y = x^2 - 1$, поэтому при вращении относительно оси X получим одинаковые фигуры (рис. 83). Искомый объем $V = \frac{16\pi}{15}$;

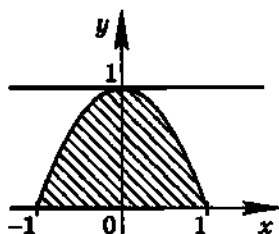


Рис. 83

б) фигура, полученная вращением $y = -x^2 + 1$ вокруг оси Y , такая же, как и полученная вращением $y = 1 - x^2$ вокруг оси Y , поэтому объем $V = \frac{\pi}{2}$;

в) искомый объем такой же, как и в вар. 1, поэтому $V = \frac{8\pi}{5}$.

2. Введем систему координат так. Основание фигуры лежит в плоскости XY , центр окружности находится в начале координат; рассмотрим диаметр, лежащий на оси X . (См. рис. 82 к вар. 1. В рассматриваемом случае $\angle C = 90^\circ$.) Сечение в точке $(x; 0)$, AB — гипотенуза сечения. $AB = 2\sqrt{1-x^2}$. Площадь сечения $S(x) = 1 - x^2$. Тогда

$$\text{объем } V = \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

3. Может. Например, если вращать график функции $y = \frac{x}{2\sqrt{x^6+1}}$.
См. вар. 1. $V < \frac{\pi}{12} < 1$.

Задание 3.11. Длина кривой

Вариант 1

1. Длина кривой вычисляется по известной формуле

$$L = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{81x^2 + 18x + 1}{36x}} dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{9x+1}{6\sqrt{x}} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{2} \sqrt{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{6\sqrt{x}} dx = x^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{8} x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{7}{24}.$$

2. Длина кривой на заданных промежутках

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+9x^4} dx, \quad L_2 = \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1+9x^4} dx,$$

в последнем интеграле сделаем замену $t = x - 1$, тогда $dt = dx$, $x = t + 1$, $t(2) = 1$, $t(1) = 0$ и интеграл имеет вид $L_2 = \int_0^1 \sqrt{1+9(t+1)^4} dx$.

Итак как $\sqrt{1+9(t+1)^4} \geq \sqrt{1+9t^4}$, то $\int_0^1 \sqrt{1+9(t+1)^4} dt > \int_0^1 \sqrt{1+9t^4} dx = L_1$, то есть $L_2 > L_1$.

3. Необходимое условие для функции $f(x)$:

$$f(x) \geq 0, \quad L = 2f(x) = \int_0^x \sqrt{1+(f'(x))^2} dx.$$

Продифференцируем равенство по x , тогда $2f'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ и для $f(x) \geq 0$ $4(f'(x))^2 = 1+(f'(x))^2$, откуда получаем $(f'(x))^2 = \frac{1}{3}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(выбрали положительный знак производной). Решая получившееся дифференциальное уравнение, вычисляем $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x + C$. Постоян-

ную C определяем из условия, что при $x=0$ длина кривой на промежутке $[0; x]$ $L=0$, то есть $C=0$ и $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Вариант 2

$$\begin{aligned} 1. L &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{(4x+1)^2}}{4\sqrt{x}} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{4x+1}{4\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{x}}{2} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. На промежутке $[0; 1]$ длина кривой меньше. См. решение вар. 1.

3. $-2f(x) = \int_0^x \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$, откуда, дифференцируя, получаем, что $-2f'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$. Решая уравнение аналогично вар. 1, получим, что $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Задача 3.12. Оценка определенных интегралов

Вариант 1

1. При $0 \leq x \leq 1$ $x^2 \leq \sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x+1} \geq 1$, поэтому $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}} \leq \sqrt{x}$, причем равенство достигается только на концах промежутка $[0; 1]$. Поэтому площадь под графиком функции $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}}$ меньше, чем площадь под графиком функции $\sqrt{x}$. И так как определенный интеграл для неотрицательной функции равен площади под графиком,
- $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}} dx < \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} < 1.$$

2. На промежутке $[2; 3]$ подинтегральная функция возрастает, следовательно, наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах промежутка. Тогда $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{3}{4}$. Так как длина промежутка равна 1, то $\frac{2}{3} \leq \int_2^3 \frac{x}{1+x} dx \leq \frac{3}{4}$.

3. а) Из условия задачи следует, что подинтегральная функция на промежутке $[0; 1]$ принимает значения от $\frac{1}{2}$ до 1. Так как длина промежутка равна 1, площадь под графиком подинтегральной функции не меньше $\frac{1}{2}$ и не превосходит 1.

- б) Сумму интегралов можно записать как $\int_0^1 \left(\frac{2}{f(x)} + f(x) \right) dx$, и так как подинтегральное выражение не превосходит 3 и длина промежутка равна 1, то значение интеграла не превосходит 3.

4. а) Если значение функции $f(x) \geq 0$ на промежутке $[0; 1]$, то интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ равен площади под графиком функции на промежутке

$[0; 1]$. Нетрудно убедиться, что число $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ равно площади прямоугольной

трапеции с основаниями $f(0)$ и $f(1)$ и высотой, равной 1. Значение $f(0)$ равно площади прямоугольника $ABED$. На рис. 84 искомая трапеция $ABCD$. Для того чтобы площадь трапеции была больше площади под графиком функции, достаточно, чтобы график функции был ниже прямой DC . Для того

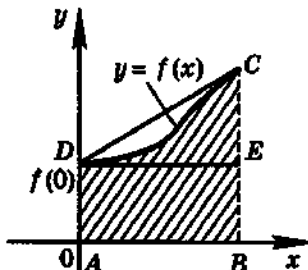


Рис. 84

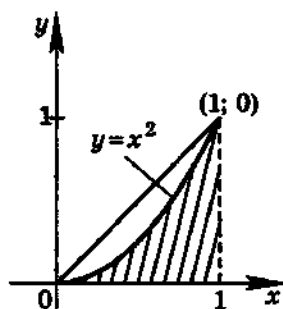


Рис. 85

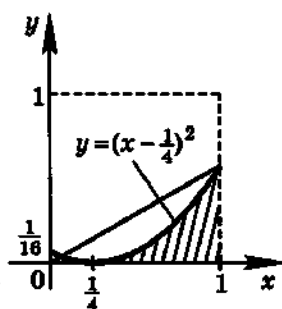


Рис. 86

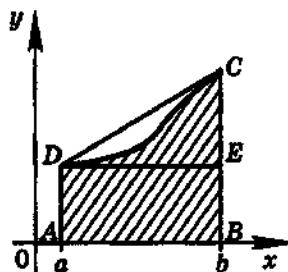


Рис. 87

чтобы значение $f(0)$ было меньше интеграла, достаточно, чтобы оно было равно наименьшему значению функции $f(x)$ на промежутке $[0; 1]$. Это только достаточное условие для функции $f(x)$. Могут быть и другие решения. Пример функции $f(x) = x^2$ (рис. 85).

Для этого примера $f(0) = 0$, $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$; $\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{1}{2}$.

Можно привести и такой пример: $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2$. Тогда $f(0) = \frac{1}{16}$;

$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{5}{16}$; $\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{48}$ (рис. 86).

б) Следующее обобщение основано на том, что определенный интеграл для положительной функции соответствует площади под интегралом.

Координаты точек $D(a; f(a))$; $C(b; f(b))$; $E(b; f(a))$. Если функция возрастает на $[a; b]$ и ее значение меньше $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$,

график $y = f(x)$ на $[a; b]$ ниже прямой, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, то

$$f(0)(b-a) < \int_a^b f(x) dx < \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a).$$

$f(0)(b-a)$ — площадь прямоугольника $ABED$, $\int_a^b f(x) dx$ — площадь

криволинейной трапеции $ABCD$, $\frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$ — площадь трапеции $ABCD$ (рис. 87).

Уравнение $y = g(x)$ — это уравнение прямой DC с тангенсом угла наклона k , который определяется из прямоугольного треугольника DEC , $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, поэтому $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a)$.

Вариант 2

1. Так как на $[0; 1]$ $\frac{x^3}{\sqrt{x+1}} < \frac{x^3}{\sqrt{x}} = x^{\frac{5}{2}}$, то $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}} < \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} < 1$.
2. На промежутке $[3; 7]$ подинтегральная функция $\frac{3}{4} \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{7}{8}$, поэтому определенный интеграл на промежутке длиной 4 удовлетворяет неравенствам $\frac{3}{4} \cdot 4 \leq \int_3^7 \frac{x}{1+x} dx \leq \frac{7}{8} \cdot 4$, т. е. его значение в пределах от 3 до 3,5.
3. а) Так как на промежутке $[-1; 0]$ $1 \leq f(x) \leq 2$, то $0,5 \leq \frac{1}{f(x)} \leq 1$ и поэтому $0,5 \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{f(x)} dx \leq 1$.

б) Доказательство такое же, как и в вар. 1.

4. а) Если $f(x) \geq 0$ на $[0; 1]$, то $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ — площадь прямоугольной трапеции с боковой стороной на отрезке $[0; 1]$, $f(0)$ — площадь прямоугольника со сторонами, равными $f(0)$ и 1, $\int_0^1 f(x) dx$ — пло-

щадь под графиком $f(x)$. Чтобы выполнялись условия задачи, графически картина может выглядеть так, как на рис. 88.

Точки имеют координаты $D(0; f(0))$; $E(1; f(0))$; $C(1; f(1))$, $B(1; 0)$, $A(0; 0)$. Площадь прямоугольника $ABED$ равна $f(0) \cdot 1 = f(0)$, площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{f(0)+f(1)}{2}$, площадь криволинейной

трапеции $ABCD$ равна $\int_0^1 f(x) dx$.

Для того чтобы выполнялись условия задачи, достаточно, чтобы функция $f(x)$ убывала на $[0; 1]$ и график функции $y = f(x)$ был выше прямой, проведенной через точки $(0; f(0))$ и $(1; f(1))$. Например, функция $y = 1 - x^2$ (рис. 89).

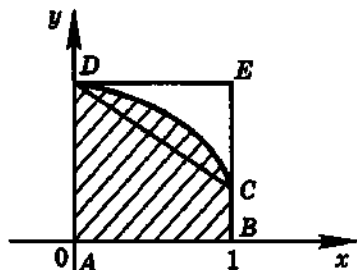


Рис. 88

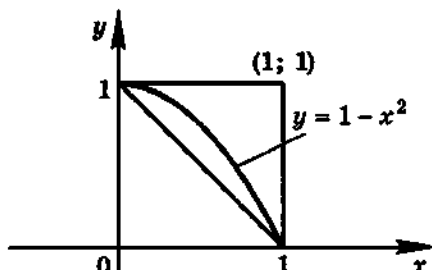


Рис. 89

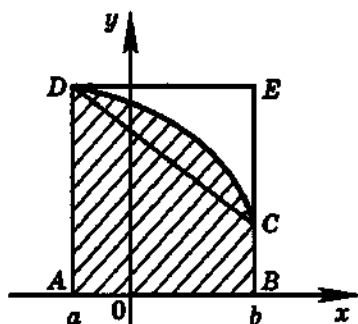


Рис. 90

б) Обобщение может быть таким. Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$ и значение $f(x) > g(x)$ (рис. 90), где

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

то выполняются неравенства

$$f(a)(b - a) > \int_a^b f(x) dx > \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

Примечание: Уравнение $y = g(x)$ — уравнение прямой, проходящей через точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$.

Задание 3.13. Приближенное вычисление определенных интегралов

Вариант 1

1. Наименьшее значение функции $y = \frac{1}{1+x}$ на промежутке равно $\frac{1}{4}$, а наибольшее — $\frac{1}{2}$, поэтому интеграл можно оценить так:

$$\frac{1}{4}(3 - 1) < \int_1^3 \frac{dx}{1+x} < \frac{1}{2}(3 - 1),$$

то есть границы оценки 0,5 и 1.

2. Разбиваем промежуток интегрирования $[1; 3]$ на 4 равные части. Тогда $h = \frac{1}{2}$, границы промежутков:

$$x_0 = 1, x_1 = x_0 + \frac{1}{2} = 1,5,$$

$$x_2 = x_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2,$$

$$x_3 = 2,5, x_4 = 3 \text{ (рис. 91)}.$$

Оценка интеграла с недостатком:

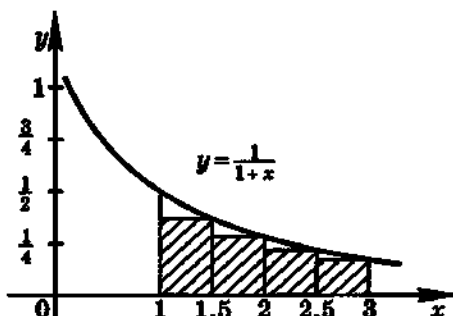


Рис. 91

$$I_n = h(y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + y(x_4)) = 0,635.$$

Погрешность равна

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+x} - I_n = \ln(1+x) \Big|_1^3 - 0,635 = \ln 4 - \ln 2 - 0,635 = 0,058.$$

3. Так как $n = 3$, шаг интегрирования $h = \frac{2}{3}$. Тогда координаты концов отрезков разбиения:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1, \\x_1 &= 1\frac{2}{3}, \\x_2 &= 2\frac{1}{3}, \\x_3 &= 3.\end{aligned}$$

Оценка интеграла по формуле трапеций:

$$\begin{aligned}I_{\text{тр}} &= h \left(\frac{1}{2}(y(x_0) + y(x_1)) + \frac{1}{2}(y(x_1) + y(x_2)) + \frac{1}{2}(y(x_2) + y(x_3)) \right) = \\&= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{4} \right) \right) = 0,700.\end{aligned}$$

4. Для вычисления по формуле Симпсона при $n = 3$ надо знать значения функции в серединах отрезков. Обозначим их: $x_{\frac{1}{2}} = \frac{x_0 + x_1}{2}$, $x_{\frac{3}{2}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $x_{\frac{5}{2}} = \frac{x_2 + x_3}{2}$. Тогда $x_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$, $x_{\frac{3}{2}} = 2$, $x_{\frac{5}{2}} = \frac{8}{3}$. Приближенное значение интеграла по формуле Симпсона равно

$$I_c = \frac{h}{6} (y(x_0) + y(x_3) + 2y(x_1) + 2y(x_2) + 4y(x_{\frac{1}{2}}) + 4y(x_{\frac{3}{2}}) + 4y(x_{\frac{5}{2}})) = 0,693.$$

Вариант 2

1. При $x \in [3; 5]$ $0,25 \leq \frac{1}{x-1} \leq 0,5$, поэтому значение интеграла не меньше $0,25 \cdot 2$ и не больше $0,5 \cdot 2$, то есть границы оценки от 0,5 до 1.

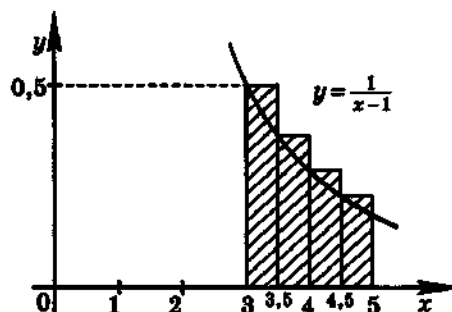


Рис. 93

$$I_n = h (y(x_0) + y(x_1) + y(x_2) + y(x_3)) = 0,760.$$

Погрешность равна $I_n - \int_3^5 \frac{dx}{x-1} = 0,760 - \ln(x-1) \Big|_3^5 = 0,067.$

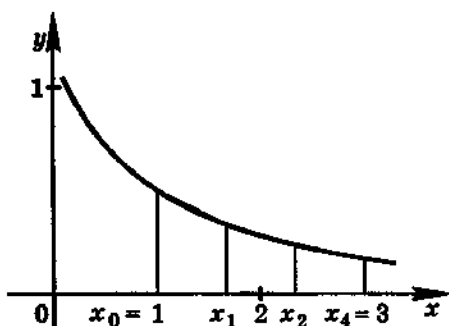


Рис. 92

2. Разбиваем промежуток интегрирования на 4 равные части. Тогда шаг интегрирования $h = \frac{1}{2}$, границы промежутков:

$$\begin{aligned}x_0 &= 3, x_1 = 3,5, \\x_2 &= 4, x_3 = 4,5, \\x_4 &= 5 \text{ (рис. 93)}.\end{aligned}$$

При вычислении с избытком за значение интеграла берем сумму площадей прямоугольников шириной h и высотами, равными $y(x_0)$, $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$. Тогда

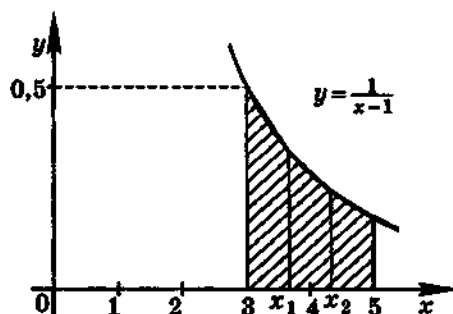


Рис. 94

3. Так как $n = 3$, то шаг интегрирования $h = \frac{2}{3}$. Тогда координаты концов отрезков разбиения: $x_0 = 1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{3}$, $x_3 = 3$ (рис. 94). Оценка интеграла по формуле трапеций

$$I_{\text{тр}} = h \left(\frac{1}{2} (y(x_0) + y(x_1)) + \frac{1}{2} (y(x_1) + y(x_2)) + \frac{1}{2} (y(x_2) + y(x_3)) \right) = 0,700.$$

4. Для вычисления интеграла по формуле Симпсона при $n = 3$ надо знать значения функции в серединах отрезков. Обозначим их:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{x_0 + x_1}{2}, x_{\frac{2}{2}} = \frac{x_1 + x_2}{2}, x_{\frac{3}{2}} = \frac{x_2 + x_3}{2}. \text{ Тогда } x_{\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}, x_{\frac{2}{2}} = 4, x_{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}.$$

Приближенное значение интеграла по формуле Симпсона равно

$$I_c = \frac{h}{6} (y(x_0) + y(x_3) + 2y(x_{\frac{1}{2}}) + 2y(x_{\frac{2}{2}}) + 4y(x_{\frac{1}{2}}) + 4y(x_{\frac{2}{2}}) + 4y(x_{\frac{3}{2}})) = 0,693.$$

Задание 3.14. Интегральные суммы

Вариант 1

1. а) Рассмотрим интеграл $\int_0^{\pi} x^3 dx$, его можно вычислить точно и при-

ближенно с шагом $h = 1$. Точное значение $\int_0^{\pi} x^3 dx = \frac{\pi^4}{4}$.

Значение интеграла с недостатком $I_n = h \sum_{i=0}^{n-1} y(i)$, $y(x) = x^3$ (рис. 95).

Значение интеграла с избытком $I_n = h \sum_{i=1}^n y(i)$ (рис. 96).

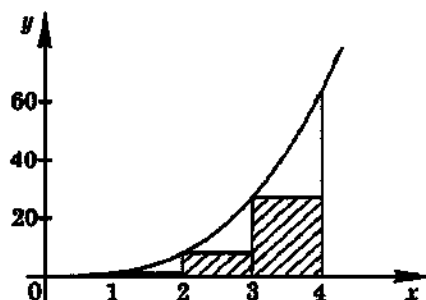


Рис. 95

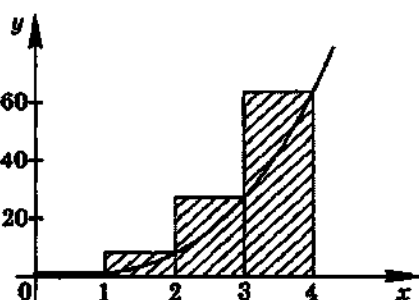


Рис. 96

Тогда точное значение интеграла $I_n < I < I_{n+1}$. Рассмотрим предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{4n^4} = \frac{1}{4}$. Так как для любого n $I_n < I$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n^4}$ существует. Но в то же время $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{n^4}$, так как $I_n(n) = I_{n+1}(n+1)$.

Значит, по свойству пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{n^4}$. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

б) Обобщение полученного результата: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^m+3^m+\dots+n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$.

Для доказательства надо рассмотреть интеграл $\int_0^n x^m dx$.

2. Рассмотрим интегралы $\int_1^{11} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ и $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Оценивая интегралы сверху и снизу формулами левых и правых прямоугольников, получим с шагом $h=1$ $\int_1^{11} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} < 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10}} < \int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Вычисляя интегралы, определим пределы искомой суммы S :

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{10^2} > S > \frac{3}{2} (\sqrt[3]{11^2} - 1) \text{ или } 5,9 < S < 7,0 \text{ (рис. 97).}$$

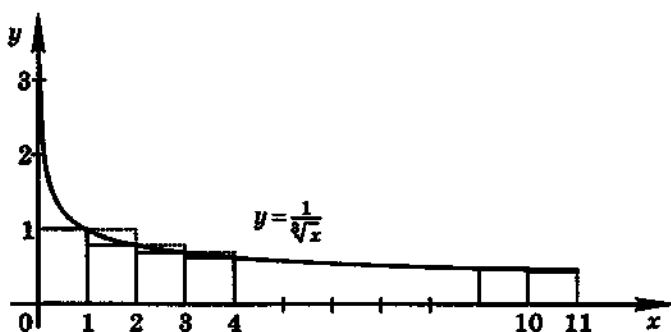


Рис. 97

Вариант 2

1. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4+2^4+3^4+\dots+n^4}{n^5} = \frac{1}{5} = 0,2$. См. вар. 1.

б) См. вар. 1.

2. Рассматривая интегралы $\int_1^{11} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ и $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, имеем

$$\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}} > S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10}} > \int_1^{11} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \frac{4}{3} \sqrt[3]{10^3} > S > \frac{4}{3} (\sqrt[3]{11^3} - 1); 7,5 > S > 6,7.$$

Задание 3.15. Несобственный интеграл

Вариант 1

1. а) Вычислим интеграл $\int_2^a \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \frac{1}{2} \int_1^A \frac{dz}{\sqrt{z^3}} = -\frac{1}{\sqrt{z}} \Big|_1^A = 1 - \frac{1}{\sqrt{A}}$, здесь $a > 2$,

при вычислении интеграла сделана замена $z = x^2 - 3$, $dz = 2x dx$,

$z(2) = 1$, $z(a) = a^2 - 3 = A$. Несобственный интеграл $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} =$

$= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$. Тогда, используя вычисленный интеграл, полу-

чаем $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2-3}} \right) = 1$.

- б) Вычислим неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = 3\sqrt[3]{t} + C = 3\sqrt[3]{x-1} + C = 3\sqrt[3]{x-1} + C.$$

Несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{a \rightarrow 1} \int_a^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{a \rightarrow 1} \left(3\sqrt[3]{x-1} \Big|_a^2 \right) =$
 $= \lim_{a \rightarrow 1} (3 - 3\sqrt[3]{a-1}) = 3$.

- в) Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$. Искомый несобственный

интеграл есть сумма пределов $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}} + \lim_{b \rightarrow 0} \int_{-1}^b \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}} =$
 $= -3 + 3 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{a}} - 3 - \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$, и так как пределы бесконечны, то несобственный интеграл не существует.

2. $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + C = -\frac{1}{2(x^2-1)} + C$. Тогда, если $|a| \neq 1$, то
- $$\int_{-a}^a \frac{x dx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x^2-1)} \Big|_{-a}^a = 0.$$

При $a = 1$ $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^2} = \lim_{a \rightarrow 1} \int_{-a}^a \frac{x dx}{(x^2-1)^2} = \lim_{a \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{2(x^2-1)} \Big|_{-a}^a \right) = 0$.

$$\text{При } a = -1 \quad \int_1^{-1} \frac{x dx}{(x^2-1)^2} = - \int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^2} = 0.$$

Итак, искомый интеграл равен нулю при всех $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ а) } f(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \lim_{a \rightarrow 0} 3\sqrt[3]{t} \Big|_a^x = \\ &= 3\sqrt[3]{x} - \lim_{a \rightarrow 0} 3\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

На рис. 98 приведен график функции.

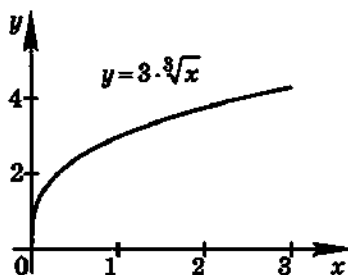


Рис. 98

б) Площадь криволинейной трапеции есть определенный интеграл на промежутке $[0; 1]$:

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3\sqrt[3]{x} dx = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} \Big|_0^1 = \frac{9}{4}.$$

б) Объем $V = \int_0^1 S_1(x) dx$, где $S_1(x) = \pi f^2(x)$ — площадь круга радиуса $f(x)$. Тогда $V = \pi \int_0^1 9 \sqrt[3]{x^2} dx = 9\pi \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{27}{5} \pi$.

Вариант 2

1. а) $\int_3^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-8)^3}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_3^a \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-8)^3}}$. Вычислим неопределенный интеграл и найдем предел: $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-8)^3}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(t-8)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{t-8}} + C$, тогда искомый интеграл равен $\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-8}} \Big|_3^a \right) = 1 - \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2-8}} = 1$.

$$\text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \lim_{a \rightarrow -1} \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \lim_{a \rightarrow -1} 3(\sqrt[3]{x+1}) \Big|_a^0 = 3 - \lim_{a \rightarrow -1} 3\sqrt[3]{a+1} = 3.$$

в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ не существует, см. вар. 1.

2. Рассмотрим неопределенный интеграл

$$\int \frac{x dx}{(x^2-1)^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t-1)^4} = -\frac{1}{6(t-1)^3} + C = -\frac{1}{6(x^2-1)^3} + C.$$

Тогда при $a \neq \pm 1$ $\int_{-a}^a \frac{x dx}{(x^2-1)^4} = -\frac{1}{6(x^2-1)^3} \Big|_{-a}^a = 0$.

При $a = 1$ $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^4} = \lim_{a \rightarrow 1} \int_{-a}^a \frac{x dx}{(x^2-1)^4} = 0$,

при $a = -1$ $\int_1^{-1} \frac{x dx}{(x^2-1)^4} = -\int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^4} = 0$.

Итак, искомый интеграл равен нулю при любых $a \in \mathbb{R}$.

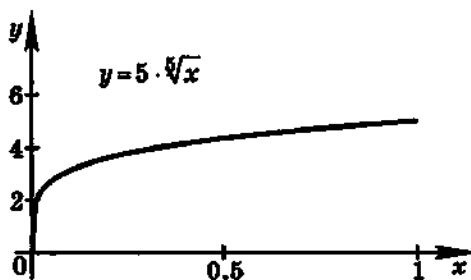


Рис. 99

$$\begin{aligned} 3. \text{ а) } f(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[5]{t^4}} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^x \frac{dt}{\sqrt[5]{t^4}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (5\sqrt[5]{x} - 5\sqrt[5]{a}) = 5\sqrt[5]{x}. \end{aligned}$$

График функции приведен на рис. 99.

$$\begin{aligned} 6) S &= \int_0^1 f(x) dx = 5 \int_0^1 \sqrt[5]{x} dx = \\ &= 5 \cdot \frac{5}{6} \sqrt[5]{x^6} \Big|_0^1 = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{в) } V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 25 \sqrt[5]{x^2} dx = 25\pi \cdot \frac{5}{7} \sqrt[5]{x^7} \Big|_0^1 = \frac{125}{7}\pi.$$

Задание 3.16. Применение интеграла

Вариант 1

1. Рассмотрим случай расположения точек N и B , которые зависят от возможного вида графика $y = f(x)$ (рис. 100).

В общем виде для произвольной точки $A(x_0; f(x_0))$ напомним уравнение касательной и уравнение нормали. Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Тогда тангенс угла наклона нормали равен $-\frac{1}{f'(x_0)}$, и уравнение нормали имеет вид $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Пусть нормаль пересекает ось абсцисс в точке $N(x_1; 0)$. Тогда, приняв $y = 0$, из уравнения нормали получим $f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) = 0$. От-

сюда $x_1 - x_0 = f'(x_0) \cdot f(x_0)$. Вычислим NB — расстояние между точками $N(x_1; 0)$ и $B(x_0; 0)$. Если $x_1 < x_0$, случаи 3 и 4, $NB = x_0 - x_1$. Если $x_1 > x_0$, случаи 1 и 2, $NB = x_1 - x_0$. По условию задачи $NB = OB^3$. От-

резок $OB = x_0$. Равенство $NB = OB^3$ приведет к следующим уравнениям.

В случаях 1 и 2 имеем $x_0^3 = f'(x_0)f(x_0)$. В случаях 3 и 4 имеем

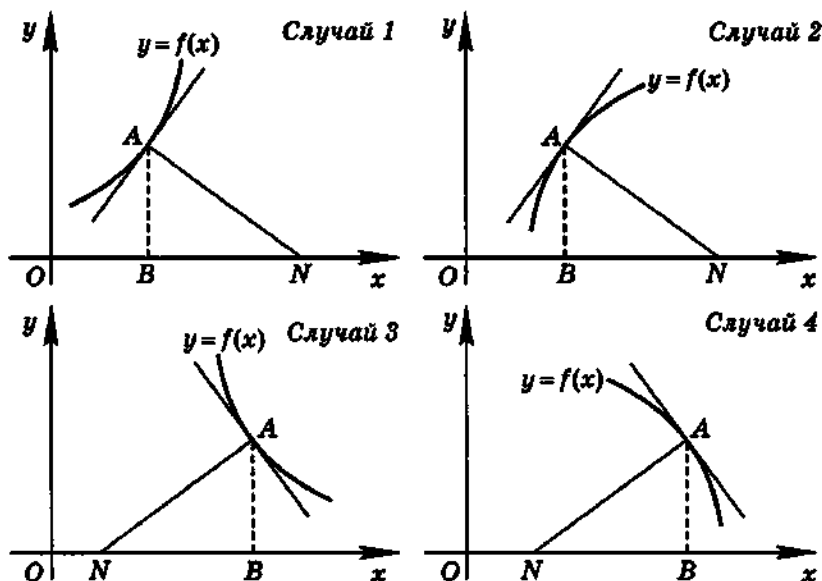


Рис. 100

$x_0^3 = -f'(x_0)f(x_0)$. Первое уравнение можно записать так:

$$x_0^3 = f(x_0) \frac{df(x_0)}{dx_0}, \quad x_0^3 dx_0 = f(x_0) df(x_0).$$

Интегрируя это уравнение, получим $\int x_0^3 dx_0 = \int f(x_0) df(x_0)$, или

$$\frac{x_0^4}{4} + C = \frac{f^2(x_0)}{2}.$$

Для определения постоянной C используем условие, что график $y = f(x_0)$ проходит через точку $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Тогда $1 + C = 1$, $C = 0$. Значит, $f^2(x_0) = \frac{x_0^4}{2}$, так как график функции расположен в первой четверти, то $x_0 \geq 0$ и $f(x_0) \geq 0$. Искомая функция $f(x_0) = \frac{x_0^2}{\sqrt{2}}$. Решая уравнение $x_0^3 = -f'(x_0)f(x_0)$, находим, что $-\frac{x_0^4}{4} + C = \frac{f^2(x_0)}{2}$, $-1 + C = 1$, $C = 2$, $f^2(x_0) = 4 - \frac{x_0^4}{2}$. В этом случае $x_0 \leq \sqrt[4]{8}$. Итак, функции $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ и $f(x) = \sqrt{4 - \frac{x^4}{2}}$ удовлетворяют условию задачи.

2. Пусть $S(t)$ — путь, тогда производная $S'(t)$ — скорость. По условию задачи $S'(t) = \frac{C}{S(t)}$, $S dS = C dt$, $\frac{S^2}{2} = Ct + C_1$, $S = \sqrt{2Ct + 2C_1}$. Постоянные C и C_1 можно определить из начальных условий $S(0) = 2$, $S'(0) = 1$. Тогда $C_1 = 2$, $C = 2$ и, значит, $S = 2\sqrt{t+1}$. Путь, пройденный за 8 с, равен $S(8) = 6$ м, скорость в это время $S'(8) = \frac{1}{3}$ м/с.

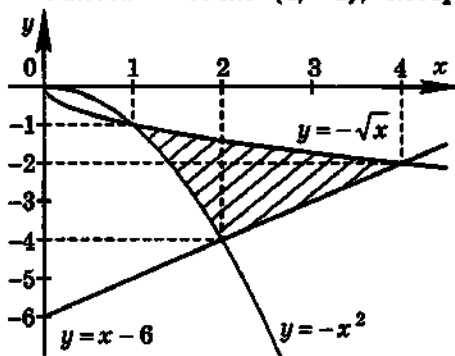
Вариант 2

- Задачу можно решить аналогично вар. 1 в той последовательности, как изложено. Но заметим, что если в условии задачи из вар. 1 заменить y на $-y$, то получим условие данной задачи. Тогда решение есть функция $-y = \frac{x^2}{2}$, то есть $y = -\frac{x^2}{2}$.
- См. вар. 1. $\frac{S^2}{2} = Ct + C_1$, из начальных данных $S(0) = 4$, $S'(0) = 1$. Тогда $C_1 = 8$, $C = 4$. $S = \sqrt{8(t+2)}$. Путь, пройденный за 6 с, равен $S(6) = 8$ м, скорость в это время $S'(6) = \frac{1}{2} \frac{m}{c}$.

Задание 3.17. Контрольное задание

Вариант 1

- Найдем точки пересечения графиков функций. При $x \geq 0$ $y = -x^2$ и $y = x - 6$ пересекаются в точке $(2; -4)$, координата $x = 2$ определяется из уравнения $-x^2 = x - 6$. Графики $y = x - 6$ и $y = -\sqrt{x}$ пересекаются в точке $(4; -2)$, которая определяется из уравнения



$x - 6 = -\sqrt{x}$. Графики $y = -x^2$ и $y = -\sqrt{x}$ пересекаются в точках $(0; 0)$ и $(1; -1)$. Площадь фигуры, ограниченной всеми тремя линиями, заключена по x в пределах от 1 до 4 и состоит из двух частей, первая часть S_1 :

$$x \in [1; 2] \text{ и } y \in [-x^2; -\sqrt{x}];$$

вторая часть S_2 :

$$x \in [2; 4] \text{ и } y \in [x - 6; -\sqrt{x}].$$

Тогда площадь фигуры

$$S = S_1 + S_2,$$

$$\text{где } S_1 = \int_1^2 (-\sqrt{x} + x^2) dx, \quad S_2 = \int_2^4 (-\sqrt{x} - x + 6) dx.$$

$$\text{Тогда } S = -\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_2^4 - \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 + 6x \Big|_2^4 = \frac{11}{3}.$$

$$2. \text{ а) } S_1 = \int_1^a \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} dx = \int_1^a (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) dx,$$

$$S_2 = \int_1^a \sqrt{x^2 - x} dx = \int_1^a \sqrt{x(x-1)} dx = \int_1^a \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} dx.$$

Рис. 101

Так как среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического, то $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$. Равенство достигается только при $\sqrt{x} = \sqrt{x-1}$, что здесь невозможно. Поэтому $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{2} > \sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ и $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$. Интеграл от функции $f(x)$ больше, чем интеграл от функции $g(x)$.

б) Интегралы на $[1; +\infty)$ несобственные.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} dx &= \int_1^{\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^A + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \Big|_1^A \right) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \sqrt{A^3} + \frac{2}{3} \sqrt{(A+1)^3} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{2} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится. Так как $g(x) = \sqrt[4]{x^2-x} > \sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt{x-1}$ при $x \geq 1$, то $\int_1^{\infty} \sqrt{x-1} dx < \int_1^{\infty} g(x) dx$, но $\int_1^{\infty} \sqrt{x-1} dx$ расходится, поэтому $\int_1^{\infty} g(x) dx$ тоже расходится. Исходные интегралы невозможно сравнить.

3. Площадь рассматриваемой фигуры $S(a) = \int_a^{2a} \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{12} \Big|_a^{2a} - \frac{1}{x} \Big|_a^{2a} = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2a}$ (рис. 102).

Найдем экстремальные точки функции $S(a)$ из уравнения

$$S'(a) = 0, S'(a) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2a^2},$$

откуда

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2a^2} = 0, a^3 - 1 = 0, a = 1.$$

Площадь фигуры экстремальна при $a = 1$, а именно: при $a = 1$ значение $S(a)$ минимально.

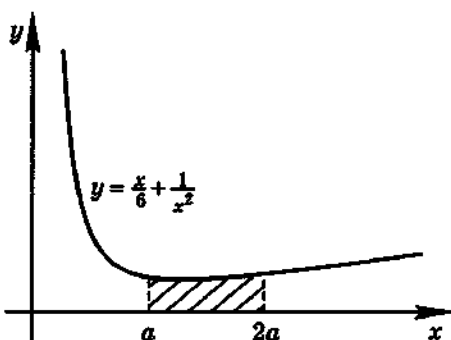


Рис. 102

4. Рассмотрим функцию $F(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{100}$, тогда производная этой функции $f(x) = F'(x) = 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99}$ в точке $x = 2$ и есть искомая сумма. Вычислим $F(x)$ — это сумма геометрической

прогрессии с 99 членами и знаменателем $q = x$. Тогда $F(x) = x^2 \frac{x^{99} - 1}{x - 1}$, откуда вычислим $f(x) = F'(x) = 2x \cdot \frac{x^{99} - 1}{x - 1} + x^2 \cdot \frac{99x^{98} - 99x^{98} + 1}{(x - 1)^2}$. Подставим $x = 2$. Тогда $f(2) = 2^{101} + 98 \cdot 2^{101} - 99 \cdot 2^{100} = 99 \cdot 2^{101} - 99 \cdot 2^{100} = 99 \cdot 2^{100}(2 - 1) = 99 \cdot 2^{100}$ — это искомая сумма.

5. а) Искомый интеграл есть площадь под графиком $y = \sqrt{(x - 1)(2 - x)}$ при $x \in [1; 2]$. Линия $y = \sqrt{(x - 1)(2 - x)}$ — полуокружность

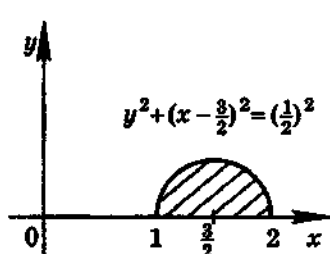


Рис. 102

$$\begin{cases} y^2 + (x - \frac{3}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2, & x \in [1; 2], \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Значит, искомый интеграл есть площадь полукруга с радиусом $r = \frac{1}{2}$ (рис. 102). Тогда площадь равна $\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{8}$.

б) Обобщение следующее:

$$\int_n^{n+1} (x - n)(-x + n + 1) dx = \frac{\pi}{8}.$$

Функцию $y = \sqrt{(x - n)(n + 1 - x)}$ можно преобразовать так:

$$y = \sqrt{-(x - (n + \frac{1}{2}))^2 + (\frac{1}{2})^2}.$$

Тогда эта линия есть полуокружность

$$\begin{cases} y^2 + (x - (n + \frac{1}{2}))^2 = (\frac{1}{2})^2, & x \in [n; n + 1], \\ y \geq 0, \end{cases}$$

и искомый интеграл равен площади полукруга радиуса $\frac{1}{2}$.

Вариант 2

- Если в условии заменить x на $-x$ и y на $-y$, получим фигуру из варианта 1. Поэтому площадь равна $\frac{11}{8}$. Можно проделать вычисления, аналогичные вар. 1, и получить этот же результат.
- а) Представим $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x}$. Тогда, аналогично вар. 1, $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x} > \sqrt{\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x}}$ и $f(x) > g(x)$. Интеграл от первой функции больше.
- б) Интегралы расходятся, сравнить их невозможно. См. вар. 1.
- Задача заменой x на $-x$ и a на $-a$ сводится к вар. 1. Площадь фигуры экстремальна при $a = -1$.

4. Сумма равна $999 \cdot 2^{1000}$, см. вар. 1.

5. а) $\int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)} dx = \frac{\pi}{8}$, см. вар. 1.

б) См. вар. 1.

Тема 4

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Задание 4.1. Значения тригонометрических функций

Вариант 1

1. Например $x = \frac{\pi}{9}$. Так как углы $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$ — в первой четверти, то $\sin x > 0$, $\cos 2x > 0$, $\operatorname{tg} 3x > 0$, $\operatorname{ctg} 4x > 0$. Углы $\frac{5\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}$ — во второй четверти, поэтому $\sec 5x < 0$, $\operatorname{cosec} 6x > 0$, произведение всех этих чисел отрицательно.
2. Определим, какие числа входят в множества A и B . Числа из множества A вида $\frac{\pi}{3}k$, а множество B состоит из чисел вида $\frac{\pi}{3} + \pi l$, где k и l целые числа. Определим, когда $\frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{3} + \pi l$, откуда получаем, что $k = 1 + 3l$ — соотношение между k и l . Значит, в оба множества входят числа вида $\frac{\pi}{3}(1 + 3l)$, где l — целые числа. Значения тригонометрических функций:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}(1 + 3l)\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, l - \text{четн. ч.}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, l - \text{нечетн. ч.}, \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}(1 + 3l)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, l - \text{четн. ч.}, \\ -\frac{1}{2}, l - \text{нечетн. ч.}, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}(1 + 3l)\right) = \sqrt{3}, \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}(1 + 3l)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{3}(1 + 3l)\right) = \begin{cases} 2, l - \text{четн. ч.}, \\ -2, l - \text{нечетн. ч.}, \end{cases}$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3}(1 + 3l)\right) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}, l - \text{четн. ч.}, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}, l - \text{нечетн. ч.}, \end{cases}$$

3. а) Так как первый член и знаменатель геометрической прогрессии не могут равняться нулю, последовательность a_n не является геометрической прогрессией при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) При $x \neq \frac{\pi}{2}k$ (то есть при $0 < |\alpha_n| < 1$) последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

в) Первый член $a_1 = -\frac{1}{2}$, знаменатель $q = -\frac{1}{2}$. Сумма $S = a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{1}{3}$.

4. Уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0$, откуда, решая уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ и $\operatorname{tg} x = -1$, получим
$$\begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l, \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Так как $7\pi < 23$, а $8\pi > 24$ и $-\frac{\pi}{4} + 8\pi > 24$ и $-\frac{\pi}{4} + 7\pi < 23$, то на промежутке $[23; 24]$ нет решений.

5. Наименьшие решения $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\beta_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\gamma_1 = \frac{5\pi}{6}$, $\delta_1 = \frac{\pi}{6}$; наибольшие решения $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\beta_2 = \frac{5\pi}{4}$, $\gamma_2 = \frac{11\pi}{6}$, $\delta_2 = \frac{7\pi}{6}$. Наибольшее значение суммы равно $\frac{59\pi}{12}$, наименьшее значение суммы равно $\frac{25\pi}{12}$.

Вариант 2

- Например, $x = \frac{\pi}{9}$. Так как углы $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{3\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$ находятся в первой четверти, то $\sin \frac{\pi}{9} > 0$, $\cos \frac{2\pi}{9} > 0$, $\operatorname{ctg} 3x > 0$, $\operatorname{tg} 4x > 0$. Для $x = \frac{\pi}{9}$ $\operatorname{сосес} 5x > 0$, $\operatorname{сес} 6x < 0$. Произведение этих чисел меньше нуля.
- $A = \frac{\pi}{4}k$, $B = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Все числа множества B входят в множество A . Функции этих углов $\sin \varphi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \varphi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \varphi = 1$, $\operatorname{сес} \varphi = \pm \sqrt{2}$, $\operatorname{сосес} \varphi = \pm \sqrt{2}$.
- а) Последовательность a_n не является геометрической прогрессией при $\cos x = 0$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
б) Последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией при условии $|\cos x| < 1$, что выполняется при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $\cos x \neq 0$, то есть $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Значит, последовательность — геометрическая прогрессия, если $x \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.
в) $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Первый член прогрессии $a_1 = \frac{3}{4}$, знаменатель $q = \frac{3}{4}$. Тогда сумма $S = a_1 \frac{1}{1-q} = 3$.
- Уравнение равносильно уравнениям $\operatorname{ctg} x = 0$ и $\operatorname{ctg} x = -1$. Решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Корень $x = \frac{\pi}{2} + 7\pi$ принадлежит промежутку $[23; 24]$.

5. Наименьшие решения $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\gamma_1 = \frac{5\pi}{6}$, $\delta_1 = \frac{\pi}{6}$, наибольшие решения $\alpha_2 = \frac{5\pi}{3}$, $\beta_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\gamma_2 = \frac{11\pi}{6}$, $\delta_2 = \frac{7\pi}{6}$. Тогда наименьшее значение суммы $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = \frac{19}{12}\pi$, наибольшее значение суммы $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = \frac{65}{12}\pi$.

Задание 4.2. Общие свойства тригонометрических функций

Вариант 1

1. Область определения функции является решением системы

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x - 1} > 0, \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

откуда получаем $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Перепишем уравнение в виде $1 + 2\sin^4 x = -\cos x$. Так как область значений $\cos x$ от -1 до 1 , то есть $-1 \leq \cos x \leq 1$, а $1 + 2\sin^4 x \geq 1$, то решение может быть только тогда, когда $\sin x = 0$ и $\cos x = -1$, что равносильно $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Четность определяется условием, что для любого t из области определения $x(t) = x(-t)$, значит, должно выполняться равенство $\frac{\cos t}{a \sin t - 1} = \frac{\cos(-t)}{a \sin(-t) - 1}$, откуда получаем, что $\frac{\cos t}{a \sin t - 1} = \frac{\cos t}{-a \sin t - 1}$ или для $\cos t \neq 0$ $a \sin t = -a \sin t$. Для $\sin t \neq 0$ это возможно при $a = 0$. Нечетность определяется условием, что для любого t из области определения $x(-t) = -x(t)$. Тогда $\frac{\cos(-t)}{a \sin(-t) - 1} = -\frac{\cos t}{a \sin t - 1}$, для $\cos t \neq 0$ $-a \sin t - 1 = -a \sin t + 1$. Это условие для любого t не выполняется ни при каких a . Значит, функция $x(t)$ при $a = 0$ четная, а при $a \neq 0$ этим свойством не обладает.

4. а) Определим, при каких x функция достигает своего наибольшего значения $\sin \sqrt{|x|} = 1$, откуда получим, что $\sqrt{|x|} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или $|x| = (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)^2$. Значит, максимальное значение 1 достигается при $x = \pm(\frac{\pi^2}{4} + 4\pi^2 k^2 + 2\pi^2 k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим расстояние между соседними максимумами при $x > 0$, оно будет равно $\frac{\pi^2}{4} + 4\pi^2 k^2 + 2\pi^2 k - \frac{\pi^2}{4} - 4\pi^2(k-1)^2 - 2\pi^2(k-1) = 8\pi^2 k - 2\pi^2$. С ростом k расстояние неограниченно увеличивается, поэтому функция не имеет периода.

- б) Функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, функция $y = \operatorname{tg} \pi x$ не определена в точках $x\pi = \frac{\pi}{2} + \pi l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$. Значит, функция $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi x$ не определена при $x = \pi(\frac{1}{2} + k)$ и $x = \frac{1}{2} + l$.

$k, l \in \mathbb{Z}$. Прямые $x = \pi(\frac{1}{2} + k)$ и $x = \frac{1}{2} + l$ — вертикальные асимптоты.

Расстояние между асимптотами $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3}{2}$ равно $L = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\pi-3}{2}$.

Рассмотрим всевозможные расстояния между асимптотами. Это $\pi(\frac{1}{2} + k) - \frac{1}{2} - l$, $\pi(\frac{1}{2} + k) - \pi(\frac{1}{2} + n)$, $\frac{1}{2} + l - \frac{1}{2} - m$, где $k, l, n, m \in \mathbb{Z}$. При каких k, l, n, m эти расстояния равны $\frac{\pi-3}{2}$? Для этого рассмотрим

равенства $\pi(\frac{1}{2} + k) - \frac{1}{2} - l = \frac{\pi-3}{2}$, $\pi(\frac{1}{2} + k) - \pi(\frac{1}{2} + n) = \frac{\pi-3}{2}$, $\frac{1}{2} + l - \frac{1}{2} - m = \frac{\pi-3}{2}$; после несложных преобразований они примут вид

$\frac{\pi-3}{2} + \pi k - l + 1 = \frac{\pi-3}{2}$, $\pi(k - n) = \frac{\pi-3}{2}$, $l - m = \frac{\pi-3}{2}$. Эти уравнения не имеют целых решений k, l, n, m . Это означает, что расстояние, равное $\frac{\pi-3}{2}$ между асимптотами, принимается только один раз.

Поэтому нет периодичности. Функция $y(x)$ не имеет периода.

5. Раскрыв модуль, уравнение можно представить в виде совокупности уравнений $\begin{cases} 2y = y \cdot \operatorname{tg} x, & y \leq 0, \\ y \cdot \operatorname{tg} x = 0, & y > 0. \end{cases}$

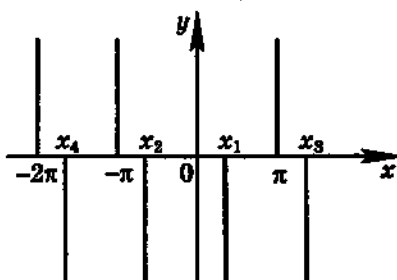


Рис. 103

Из первого уравнения получим первое решение $y = 0$. Если $y < 0$, то первое уравнение имеет решение $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго уравнения решение $\begin{cases} y > 0, \\ x = \pi l, & l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

$$x_1 = \operatorname{arctg} 2, \quad x_2 = \operatorname{arctg} 2 - \pi,$$

$$x_3 = \operatorname{arctg} 2 + \pi, \quad x_4 = \operatorname{arctg} 2 - 2\pi.$$

$$\operatorname{arctg} 2 \approx 1,107 \text{ (рис. 103)}.$$

Вариант 2

1. Область определения функции вычислим из системы $\begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \frac{\cos x}{\sin x - 1} > 0, \end{cases}$

которая равносильна системе $\begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \cos x < 0, \end{cases}$ решения которой есть

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Решим равносильное уравнение $2\cos^4 x = -1 - \sin x$, так как при всех $x \in \mathbb{R}$ $\cos^4 x \geq 0$ и $-1 - \sin x \leq 0$, то решение уравнения удовлетворяет системе $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -1, \end{cases}$ то есть $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решение аналогично вар. 1. При $a = 0$ функция нечетная. При $a \neq 0$ свойством четности и нечетности не обладает.

4. а), б) функции не имеют периода. См. вар. 1.

5. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} 2y = y \cdot \operatorname{ctg} x, & y \geq 0, \\ y \cdot \operatorname{ctg} x = 0, & y < 0. \end{cases}$$

$$\varphi = \operatorname{arccotg} 2 = 0,464 \text{ (рис. 104).}$$

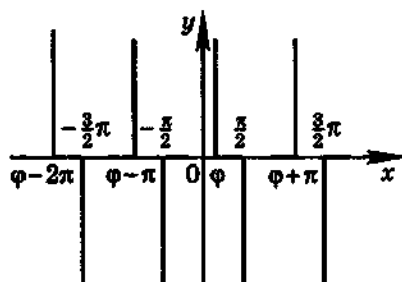


Рис. 104

Задание 4.3. Основные тригонометрические тождества

Вариант 1

- $$\operatorname{cosec}^3 x - 3 \operatorname{cosec} x + 3 \sin x - \sin^3 x = \frac{1}{\sin^3 x} - 3 \frac{1}{\sin x} + 3 \sin x - \sin^3 x =$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)^3 = \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{(\cos^2 x)^3}{\sin^3 x} = \frac{\cos^6 x}{\sin^3 x} = (\cos x \cdot \operatorname{ctg} x)^3.$$
- $$\sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 a)(\operatorname{ctg}^2 a - 1)} = \sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 a) \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 a)}{\operatorname{tg}^2 a}} = \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{tg}^2 a)^2}{\operatorname{tg}^2 a}} = \left| \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} a} \right| =$$

$$= \frac{2}{|\operatorname{tg} 2a|} = 2 |\operatorname{ctg} 2a|; \quad 2 |\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{6}| = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$
- Уравнение равносильно уравнению $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ или системе

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Равносильными преобразованиями получим

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x (\cos x - \sin x) = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Решения последней системы равносильны совокупности систем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1, \text{ откуда получим } x = \pi k, \quad x = \pi k + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из этих корней промежутку $[0; \pi]$ принадлежат $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \pi$.

- $$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1}.$$

По условию $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2,5$, значит,

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2,5, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - 2,5 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0.$$

Решения этого уравнения

$\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Тогда, подставляя эти значения $\operatorname{tg} \alpha$, вычислим значение исходного выражения. При $\operatorname{tg} \alpha = 2$ $\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{1}{3}$; при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ $\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = -\frac{1}{3}$.

5. $p^2(t) + q^2(t) = 1$. Действительно, для любого t

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1.$$

$p(t)$ и $q(t)$ можно принять за синус и косинус t : $q(t) = \sin t$, $p(t) = \cos t$. Тогда $1 - p^2 = q^2$, $1 - q^2 = p^2$ и $\frac{1-p^2}{1-q^2} = \frac{q^2}{p^2} = \operatorname{tg}^2 t$. Так как область значений функции $\operatorname{tg} t$ — любые числа, то значение искомого выражения может быть больше 3.

Вариант 2

$$\begin{aligned} 1. \sec^3 x - 3 \sec x + 3 \cos x - \cos^3 x &= \frac{1}{\cos^3 x} - 3 \frac{1}{\cos x} + 3 \cos x - \cos^3 x = \\ &= \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)^3 = \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos^3 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} = \sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x = (\sin x \cdot \operatorname{tg} x)^2. \end{aligned}$$

$$2. \sqrt{(1 - \operatorname{ctg}^2 a)(\operatorname{tg}^2 a - 1)} = \sqrt{(\operatorname{ctg}^2 a - 1)(1 - \operatorname{tg}^2 a)} \text{ — задача свелась к вар. 1, поэтому искомое выражение равно } 2|\operatorname{ctg} 2a|.$$

3. Несложными преобразованиями нетрудно получить последовательно равносильные уравнения

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}, \begin{cases} \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x - 1 = 0, \\ \sin x \neq 0, \end{cases} \begin{cases} \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0, \\ \sin x \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1, \text{ решения: } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Промежутку} \\ \sin x \neq 0, \end{cases}$$

$[-0,5\pi; 0,5\pi]$ принадлежат корни $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

$$4. \text{Равносильное равенство } \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3\frac{1}{3}, \begin{cases} 3\operatorname{tg}^2 \alpha - 10\operatorname{tg} \alpha + 3 = 0, \\ \operatorname{tg} \alpha \neq 0, \end{cases}$$

откуда получим, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$. Искомое выражение преобразуем:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1\right)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1\right)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}. \text{ Подставляя значение танген-}$$

са, получим, что искомое значение равно 2 или -2.

5. Может. Доказательство аналогично вар. 1. Так как $p^2(t) + q^2(t) = 1$ для любого t , и $p(0) = -1$, $q(0) = 0$, $p(t) = -\cos t$, $q(t) = -\sin t$, тогда $\frac{1-q^2}{1-p^2} = \frac{p^2}{q^2} = \operatorname{ctg}^2 t$, значение выражения может быть больше 3.

Задание 4.4. Нахождение значений тригонометрических функций по значению одной из них

Вариант 1

1. Так как $\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$, то $\sec^2 x = 101$ и $\sec x = -\sqrt{101}$, тогда $\cos x = \frac{1}{\sec x} = -\frac{1}{\sqrt{101}}$, $\sin x = -\frac{10}{\sqrt{101}}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{10}$. Значения функций расположены в следующем порядке: $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$.
2. а) $\sin t = \frac{1}{\operatorname{cosec} t} = \frac{1}{1,1}$, $\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{0,21}$. Значит, $\operatorname{tg}^2 t > 4$. Так как в условии задачи не определено, в какой четверти угол t , то знак $\operatorname{tg} t$ в задаче невозможно определить и сравнить с числом 2.
б) $\sin t = \frac{1}{1,2}$, $\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{0,44} < 3$, значит, $|\operatorname{tg} t| < \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} t < 2$.
3. а) $\cos^2 \frac{2\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-\sqrt{3})^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 12\frac{7}{12} > 4$.
б) $\cos^2 z + \frac{1}{\cos^2 z} + \operatorname{tg}^2 z + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 z} \geq 2 + 2 = 4$, так как сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, то есть $\cos^2 z + \frac{1}{\cos^2 z} \geq 2$ и $\operatorname{tg}^2 z + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 z} \geq 2$. Исходное неравенство верно при любых z , таких, что $\cos z \neq 0$ и $\sin z \neq 0$, то есть $z \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Так как $3 = 3\cos^2 y + 3\sin^2 y$, выражение можно записать в виде

$$\frac{8\sin^2 y - 4\sin y \cos y + 3\cos^2 y}{-4\sin^2 y + 3\sin y \cos y - 5\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y(8 - 4\operatorname{ctg} y + 3\operatorname{ctg}^2 y)}{\sin^2 y(-4 + 3\operatorname{ctg} y - 5\operatorname{ctg}^2 y)} = \frac{8 - 8 + 12}{-4 + 6 - 20} = -\frac{2}{8}.$$

Вариант 2

1. $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, поэтому $\operatorname{cosec}^2 x = 101$, $\operatorname{cosec} x = -\sqrt{101}$, $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{101}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{10}$, $\cos x = \sin x \cdot \operatorname{ctg} x = -\frac{10}{\sqrt{101}}$, $\sec x = -\frac{\sqrt{101}}{10}$. Значения функций расположены в следующем порядке: $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

$$2. \text{ а) } \cos t = \frac{1}{1,1}, \text{ значит, } \operatorname{ctg}^2 t = \frac{\cos^2 t}{1 - \cos^2 t} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{1}{0,21} > 4. \text{ Отсюда сле-}$$

дует, что значение $\operatorname{ctg} t$ может быть больше 2 или меньше -2, то есть $\operatorname{ctg} t > 2$ или $\operatorname{ctg} t < -2$. Сравнить $\operatorname{ctg} t$ и 2 невозможно.

$$б) \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{0,44} < 4, \text{ значит, } |\operatorname{ctg} t| < 2 \text{ и } \operatorname{ctg} t < 2.$$

$$3. \text{ а) Подставим } z = \frac{5\pi}{6}, \text{ тогда}$$

$$\sin^2 \frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{5\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 3 + 4 > 4.$$

б) Выражение в левой части неравенства определено при $z \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$. При этих z $\operatorname{cosec}^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}$ и $\operatorname{ctg}^2 z = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 z}$, и неравенство можно записать так: $\sin^2 z + \frac{1}{\sin^2 z} + \operatorname{tg}^2 z + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 z} \geq 4$, для решения неравенства вспомним, что сумма взаимно обратных положительных чисел $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Значит, $\sin^2 z + \frac{1}{\sin^2 z} \geq 2$ и $\operatorname{tg}^2 z + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 z} \geq 2$, поэтому левая часть неравенства не меньше 4 при всех $z \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Используя основное тригонометрическое тождество, запишем выражение как

$$\frac{\sin^2 y + 5 \sin y \cos y + 4 \cos^2 y}{4 \sin^2 y - 5 \sin y \cos y - 3 \cos^2 y} = \frac{\cos^2 y \left(\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 5 \frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y} + 4 \right)}{\cos^2 y \left(4 \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} - 5 \frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y} - 3 \right)} = \frac{\operatorname{tg}^2 y + 5 \operatorname{tg} y + 4}{4 \operatorname{tg}^2 y - 5 \operatorname{tg} y - 3} =$$

$$= \frac{4+10+4}{16-10-3} = 6.$$

Задание 4.5. Формулы приведения

Вариант 1

1. По формулам приведения $\sin(x + k\pi) = \sin x$ при четном k , $\sin(x + k\pi) = -\sin x$ при нечетном k . Если число k в искомой сумме четно, то число членов равно $(k+1)$, то есть нечетное число членов, которые могут быть равны $\pm \sin x$, их сумма не может быть равна нулю при любых x .

Если k нечетно, то в сумме $(k+1)$ член и это число четно. Сумма имеет вид

$$\underbrace{\sin x - \sin x}_{0} + \underbrace{\sin x - \sin x}_{0} + \dots - \sin x = 0,$$

то есть верно при любом x .

$$2. \operatorname{tg}(30^\circ - x) - \operatorname{tg}(120^\circ - x) = \operatorname{tg}(30^\circ - x) - \operatorname{tg}(90^\circ + 30^\circ - x) =$$

$$= \operatorname{tg}(30^\circ - x) - \operatorname{ctg}(30^\circ - x) = \operatorname{tg}(30^\circ - x) + \frac{1}{\operatorname{tg}(30^\circ - x)}.$$

Тогда уравнение имеет вид $\operatorname{tg}(30^\circ - x) + \frac{1}{\operatorname{tg}(30^\circ - x)} = a$. Функции $y = \operatorname{tg}(30^\circ - x)$ и $y = \frac{1}{\operatorname{tg}(30^\circ - x)}$ принимают любые значения. Эти значения взаимно обратны, поэтому их сумма при положительных $\operatorname{tg}(30^\circ - x)$ не меньше 2 и при отрицательных $\operatorname{tg}(30^\circ - x)$ не больше -2. Поэтому уравнение имеет решения при $|a| \geq 2$. Уравнение не имеет решений при $|a| < 2$.

3. Используя формулы приведения, преобразуем выражение, определяющее функцию

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \sin(1,5\pi - x)}{\cos(\pi + x) \cdot \operatorname{ctg}(1,5\pi - x)} - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sec(x - 5\pi) = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot (-\cos x)}{-\cos x \cdot \operatorname{tg} x} - \\ - \sec x \cdot (-\sec x) = -\frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \operatorname{tg} x} - \sec^2 x.$$

Область определения функции есть все $x \in R$, кроме x , при которых $\cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$, или при $x \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

В области своего определения функция имеет вид

$$f(x) = -1 + \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

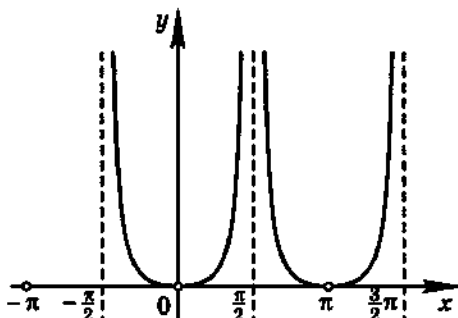


Рис. 105

График функции приведен на рис. 105

4. $\sin(\cos 1) = \cos(\frac{\pi}{2} - \cos 1)$, $\cos(\sin 1) = \sin(\frac{\pi}{2} - \sin 1)$. Так как $1 > \frac{\pi}{4}$, $\sin 1 > \cos 1$, откуда следует, что $\frac{\pi}{2} - \cos 1 > \frac{\pi}{2} - \sin 1$, поэтому $\cos(\frac{\pi}{2} - \cos 1) < \sin(\frac{\pi}{2} - \sin 1)$. Следовательно, $\sin(\cos 1) < \cos(\sin 1)$.

5. $\operatorname{cosec}(-\frac{5\pi}{4}) - \sec(-\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{\sin \frac{5\pi}{4}} - \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 = \sqrt{2} + 2$.

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{ctg}(-\frac{5\pi}{6}) = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Сравниваемые числа положительные и иррациональные. Сравним квадраты этих чисел: $(\sqrt{2} + 2)^2$ и $(2\sqrt{3})^2$, то есть $6 + 4\sqrt{2}$ и 12, то есть $4\sqrt{2}$ и 6, $2\sqrt{2}$ и 3, $\sqrt{8}$ и $\sqrt{9}$. Так как $\sqrt{8} < \sqrt{9}$, то второе число больше.

Вариант 2

1. $\cos(x + k\pi) = -\cos x$, если k — нечетное; $\cos(x + k\pi) = \cos x$, если k четное. Значит, сумма примет вид $\cos x - \cos x + \cos x - \cos x + \dots$. Чтобы сумма равнялась нулю при любом x , число k должно быть нечетным.

$$2. \operatorname{ctg}(60^\circ - x) - \operatorname{ctg}(90^\circ + 60^\circ - x) = a, \operatorname{ctg}(60^\circ - x) + \operatorname{tg}(60^\circ - x) = a, \\ \operatorname{ctg}(60^\circ - x) + \frac{1}{\operatorname{ctg}(60^\circ - x)} = a.$$

Задачу можно решить с использованием свойств взаимно обратных чисел, как в вар. 1, или свести уравнение к квадратному $\operatorname{ctg}^2(60^\circ - x) - a \operatorname{ctg}(60^\circ - x) + 1$ при $\operatorname{ctg}(60^\circ - x) \neq 0$. Это уравнение не имеет решений, если его дискриминант $D = a^2 - 4$ отрицательный, то есть $|a| < 2$.

$$3. \frac{\operatorname{ctg}(x-x) \cdot \cos(1,5\pi-x)}{\sin(\pi+x) \cdot \operatorname{tg}(1,5\pi-x)} + \sec(0,5\pi+x) \operatorname{cosec}(x-5\pi) = \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot (-\sin x)}{-\sin x \cdot \operatorname{ctg} x} + \frac{1}{\sin^2 x},$$

область определения функции — все x , для которых $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, то есть $x \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$. В

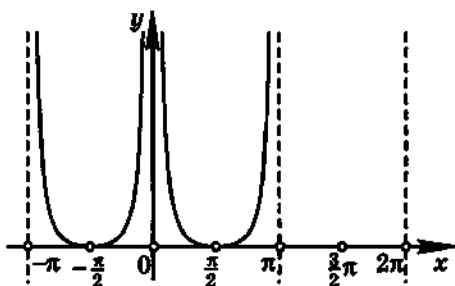


Рис. 106

области определения функция принимает вид $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, или $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$. График функции приведен на рис. 106.

4. $\sin^2(\sin 1) = 1 - \cos^2(\sin 1)$, $\cos^2(\cos 1) = 1 - \sin^2(\cos 1)$, в вар. 1 доказано, что $\cos(\sin 1) > \sin(\cos 1)$, поэтому $\sin(\sin 1) < \cos(\cos 1)$.

$$5. -\operatorname{cosec}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - \sec\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sin\frac{5\pi}{4}} - \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}} = -\sqrt{2} + 2,$$

$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{1}{3}$, второе число больше, так как $0 < 2 - \sqrt{2} < 1$, а $\sqrt{3} + \frac{1}{3} > 1$.

Задание 4.6. Контрольное задание

Вариант 1

1. Решим неравенство $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x < 0$, равносильное $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) < 0$ или $\operatorname{tg} x < 0$. Нетрудно убедиться, что если $a = 0$, то $\sin x = 0$ и, следовательно, $\operatorname{tg} x = 0$. Поэтому $a \neq 0$.

Так как значения $|\sin x| \leq 1$, то необходимое условие для a $-1 \leq \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} \leq 1$, или $-\sqrt{a^2+1} \leq 2a \leq \sqrt{a^2+1}$. Решение этого неравенства

$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как по условию $\operatorname{tg} x \leq 0$, то $a \neq 0$. Если $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, то

$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{\frac{1-3a^2}{a^2+1}}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{2a}{\sqrt{1-3a^2}}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{1-3a^2}}{2a}$. Если

$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a < 0$, то $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\frac{1-3a^2}{a^2+1}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2a}{\sqrt{1-3a^2}}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{1-3a^2}}{2a}$.

2. Выражение можно переписать как

$$\frac{(\sqrt{1+\sin t})^2 - (\sqrt{1-\sin t})^2}{\sqrt{(1-\sin t)(1+\sin t)}} = \frac{|1+\sin t| - |1-\sin t|}{\sqrt{1-\sin^2 t}}.$$

Так как $-3 < t < -2$, то $-1 < \sin t < 0$, $-1 < \cos t < 0$, значит, выражение можно преобразовать так:

$$\frac{1+\sin t - 1+\sin t}{\sqrt{\cos^2 t}} = \frac{2\sin t}{|\cos t|} = 2 \frac{\sin t}{-\cos t} = -2 \operatorname{tg} t.$$

3. Так как при любых x и y $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos y| \leq 1$, то исходному неравенству удовлетворяют только такие x и y , для которых

$$\begin{cases} |\sin x| = 1, & \sin x = \pm 1, \\ \cos y = 1, & \cos y = 1, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ y = 2\pi l, & l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Это точки пересечения горизонтальных и вертикальных прямых (рис. 107).

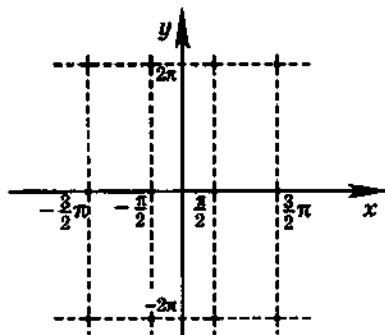


Рис. 107

4. $z = \sec \alpha + \csc \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{y}{\cos \alpha \sin \alpha}$, тогда $\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{y}{z}$.

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \frac{y^2}{z^2}}{\frac{y^2}{z^2}} = \frac{z^2}{y^2} - 2. \end{aligned}$$

5. Преобразуем функцию $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$. Область значений функции $\cos^2 x$ есть отрезок $[0; 1]$; область значений функции $\frac{1}{\cos^2 x}$ есть промежуток $[1; +\infty)$, тогда область значений функции $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}$ есть промежуток $[\frac{1}{2}; +\infty)$, область значений функции $\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \right)^2$ — промежуток $[\frac{1}{4}; +\infty)$. Следовательно, область значений искомой функции — промежуток $[1; +\infty)$.

6. Заметим, что $\cos 0,9\pi = \cos(\pi - 0,1\pi) = -\cos 0,1\pi$, $\cos 0,8\pi = -\cos 0,2\pi$, $\cos 0,7\pi = -\cos 0,3\pi$, $\cos 0,6\pi = -\cos 0,4\pi$. Отсюда следует, что искомая сумма равна $\cos 0,5\pi = 0$.

7. При $x \in [0; 1]$ ($1-x \in [0; 1]$), поэтому $\sin(1-x) > 0$; $2x \in [0; 2]$; уравнению удовлетворяют только такие x , для которых $\cos 2x \geq 0$, поэтому $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$. При таких x уравнение равносильно уравнению

$$\begin{cases} \sin(1-x) = \cos 2x, \\ x \in [0; \frac{\pi}{4}], \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - 1 + x) = \cos 2x, \\ x \in [0; \frac{\pi}{4}]. \end{cases}$$

Для $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ аргументы косинусов: $\frac{\pi}{2} - 1 + x \leq \frac{\pi}{2} - 1 + x \leq \frac{3}{4}\pi - 1$, $0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$, и при таких x значения косинуса в двух частях уравнения равны только при равенстве аргументов: $\frac{\pi}{2} - 1 + x = 2x$, откуда получаем решение $x = \frac{\pi}{2} - 1$.

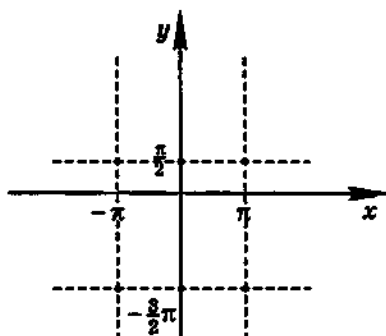
Вариант 2

1. Решение аналогично варианту 1. Все функции существуют при $a \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0) \cup (0; \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Если $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{\frac{1-3a^2}{a^2+1}}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{2a}{\sqrt{1-3a^2}}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{1-3a^2}}{2a}$. Если $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a < 0$, то $\sin x = \sqrt{\frac{1-3a^2}{a^2+1}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1-3a^2}}{2a}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{2a}{\sqrt{1-3a^2}}$.

2. Выражение можно переписать так:

$$\frac{(\sqrt{1-\cos t})^2 - (\sqrt{1+\sin t})^2}{\sqrt{(1+\cos t)(1-\cos t)}} = \frac{1-\cos t - 1-\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\frac{2\cos t}{|\sin t|}.$$

Так как $-3 < t < -2$, $\cos t < 0$, $\sin t < 0$, выражение равно $\frac{2\cos t}{\sin t} = 2\operatorname{ctg} t$.



3. Это множество точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими условиям

$$\begin{cases} |\cos x| = 1, \\ \sin y = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

(рис. 108).

Рис. 108

4. Преобразуем исходные выражения

$$x = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} - 2,$$

$$z = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{y}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha},$$

откуда имеем $\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{y}{x}$. Подставляя это выражение в x , находим, что $x = \frac{x^2}{y} - 2$.

5. Преобразуем исходное выражение для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + 1 = \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}, \text{ так}$$

как $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, то $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} < \infty$, значит, $1 \leq f(x) < \infty$.

6. Заметим, что, согласно формулам приведения,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,9\pi\right) = \sin\left(\pi - 0,1\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(0,1\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 0,1\pi\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,1\pi\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,8\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,2\pi\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,7\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,3\pi\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,6\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,4\pi\right).$$

Поэтому сумма равна $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0,5\pi\right) = \sin \pi = 0$.

7. Область допустимых значений уравнения $x \in [0; 0,5]$, при этих x уравнение сводится к уравнению $\cos(1-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, откуда имеем $1-x = \frac{\pi}{2} - 2x$, или $x = \frac{\pi}{2} - 1$, но $\frac{\pi}{2} - 1 > 0,5$, поэтому уравнение решений не имеет.

Тема 5

НАЧАЛА АНАЛИЗА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задание 5.1. Вычисление пределов

Вариант 1

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \cos 3x}{\cos 2x \cdot \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin 2x}{2x} \cos 3x}{\cos 2x \cdot 3 \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}, \text{ при вычислении этого пре-}$$

дела использован первый замечательный предел $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

$$2. \text{ Преобразуем выражение } \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{\sin x - \sin(x - (x - a))}{(x - a)}. \text{ Тогда выраже-}$$

$$\text{ние для предела примет вид } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin(x - (x - a))}{(x - a)}.$$

Используя замену $x - a = \Delta x$, его можно записать так: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(x - \Delta x)}{\Delta x}$. Последний предел по определению равен производной $\sin'(x)|_{x=a} = \cos a$.

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{x}. \text{ Пусть } t = \arcsin ax, \text{ тог-}$$

да $ax = \sin t$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{\sin t} = a$.

5. Предел равен $-8\sqrt{3}$. Для вычисления используем определение производной $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+\Delta x) - \operatorname{tg}(a)}{\Delta x} = \operatorname{tg}'(a)$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}'(a+\Delta x) - \operatorname{tg}'(a)}{\Delta x} = \operatorname{tg}''(a)$.

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}'\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - \operatorname{tg}'\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{x} = \operatorname{tg}''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \Big|_{x=\frac{2\pi}{3}} = -8\sqrt{3}.$$

Вариант 2

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin 3x}{\sin 2x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2}.$
- Решение можно свести к вар. 1. Преобразуем исходное выражение $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(\frac{\pi}{2} - a)}{x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - a} = - \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - a} \frac{\sin t - (\frac{\pi}{2} - a)}{t - (\frac{\pi}{2} - a)} = -\cos(\frac{\pi}{2} - a) = -\sin a.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arcsin x}{x}}{\frac{\sin ax}{ax}} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$ Если принять $t = \arcsin x$, то $x = \sin t$, и $\frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{1}{a}.$
- Решение аналогично вар. 1. Предел равен

$$\operatorname{ctg}''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right)' \Big|_{x=\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}\right) \Big|_{x=\frac{2\pi}{3}} = \frac{2 \left(\frac{-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = -\frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Задание 5.2. Вычисление пределов

Вариант 1

- Используем первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и как следствие $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$. Преобразуем исходное выражение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{3\sin 3x}{3x} + \frac{5\sin 5x}{5x} + \dots + (2n-1) \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)x} \right) = 1(1+3+5+\dots+2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2.$
- Введем $t = \pi - x$, тогда $x = t - \pi$, и предел можно вычислить следующим образом, используя формулу приведения: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(at - a\pi)}{\sin(t - \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin at}{\sin t} (-1)^{a-1} = (-1)^{a-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \sin at}{at} \cdot \frac{t}{\sin t} = a(-1)^{a-1}.$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\cos(\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin(\frac{\pi}{2}(x-1))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}(x-1))} = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{2}{\pi}.$$

4. Область значений функции $\sqrt{\cos|\frac{1}{x}|}$ есть промежуток $[0; 1]$, поэтому искомый предел равен нулю, как предел произведения функции, имеющей предел, и ограниченной функции.

5. Используем формулу приведения и запишем

$$\sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi),$$

тогда искомый предел вычислим следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n} (-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} (-1)^n \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Вариант 2

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin 2x}{2x} + \frac{4 \sin 4x}{4x} + \dots + \frac{2n \sin 2nx}{2nx}}{\frac{\arcsin x}{x}} =$$

$$= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin 2x}{2x} + \frac{4 \sin 4x}{4x} + \dots + \frac{2n \sin 2nx}{2nx} \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}} = 2 + 4 + \dots + 2n = \frac{2+2n}{2} n = n(n+1).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin ax} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin ax}{\sin x} \right)^{-1} = (-1)^{a-1} a^{-1} \text{ (см. вар. 1)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} (1+x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow -1} (1+x) \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x) - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x) \lim_{x \rightarrow -1} \sin \frac{\pi x}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}(1+x)} =$$

$$= - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} z}{\frac{\pi}{2} \sin z} = - \frac{2}{\pi}.$$

$$4. \text{ Так как } 0 \leq \sqrt{\left| \sin \frac{1}{x} \right|} \leq 1, \text{ то } \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\left| \sin \frac{1}{x} \right|} = 0.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 - 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 - 1} - n\pi) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{-\pi}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{\pi \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 0.$$

Задача 5.3. Непрерывность тригонометрических функций

Вариант 1

1. а) Нам известен первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. В слу-

чае $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|\sin x|}{x} = -1$. Так как предел справа не равен пределу слева, функцию $f(x)$ нельзя доопределить до непрерывной в точке $x = 0$.

$$\text{б) } f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \frac{\sin x}{x} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cos x (1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos x (1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{x^3 \cos x (1 + \cos x)}. \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Функцию можно доопределить в точке $x = 0$, положив $f(0) = \frac{1}{2}$.

2. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$, если $1 - \cos x \neq 0$.

Точки разрыва функции определяются из уравнения $1 - \cos x = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Функцию $f(x)$ можно доопределить до непрерывной следующим образом: $f(x) = 1 + \cos x$.

3. $f(0) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 7$. Функция непрерывна и на концах отрезка $[0; \frac{\pi}{2}]$, ее значения имеют разные знаки. Поэтому на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$

существует такое x_0 , что $f(x_0) = 0$, то есть существует корень. Выясним, является ли функция $f(x)$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ монотонной.

Обозначим $t = \sin x$ и рассмотрим функцию $g(t) = 3t^3 + 5t - 1$ при $t \in [0; 1]$. Производная этой функции $g'(t) = 9t^2 + 5$ положительна, поэтому $g(t)$ возрастает. Возрастает также и $f(x)$ и, следовательно, имеет на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ единственный корень.

4. Так как $|\sin x| \leq 1$, для определения множества значений функции $f(x)$ можно вычислить множество значений функции $g(t) = t^2 + at + 1$ при $-1 \leq t \leq 1$. Наименьшее значение функции $g(t)$, которая является квадратным трехчленом, в точке $t_0 = -\frac{a}{2}$, равно $1 - \frac{a^2}{4}$. Надо рассмотреть все случаи расположения точки t_0 и промежутка $[-1; 1]$ на числовой оси t .

Если $t_0 = -\frac{a}{2} < -1$, то наименьшее значение есть $g(-1)$, наибольшее значение есть $g(1)$; если $t_0 = -\frac{a}{2} > 1$, то наименьшее значение есть $g(1)$, наибольшее значение есть $g(-1)$; если $t_0 = -\frac{a}{2} \in (-1; 1)$, то наименьшее значение есть $g(t_0)$, наибольшее значение равно $g(1)$ или $g(-1)$ в зависимости от знака числа a ; если $t_0 = -\frac{a}{2} = -1$, то

наименьшее значение $g(t_0)$, наибольшее значение $g(1)$; если $t_0 = 1$, то наименьшее значение $g(t_0)$, наибольшее значение $g(-1)$.

Вычислив эти значения, запишем решение задачи:

если $a < -2$, то множество значений функции $f(x)$ есть $[2 + a; 2 - a]$;

если $a > 2$, то $[2 - a; 2 + a]$;

если $0 < a < 2$, то $[1 - \frac{a^2}{4}; 2 + a]$;

если $-2 < a < 0$, то $[1 - \frac{a^2}{4}; 2 - a]$;

если $a = \pm 2$, то $[0; 4]$;

если $a = 0$, то $[1; 2]$.

5. Для любого $x \neq 0$ выполняется неравенство $\sin x < x$. Поэтому в последовательности (a_n) $a_{n+1} < a_n$, где $a_n = \sin \sin \sin \dots \sin 1$ (n синусов). Все $a_n > 0$. Последовательность (a_n) ограничена и монотонна, поэтому имеет предел. Пусть он равен a , тогда $a = \sin a$, $a < 1$. Откуда следует $a = 0$.

Вариант 2

1. а) Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin |x|}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin |x|}{x} = -1$. Так

как предел справа не равен пределу слева, функцию $f(x)$ нельзя доопределить до непрерывности в точке $x = 0$.

б) Функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$. Рассмотрим предел функции в точке $x = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - \lg x} = -2$, так как в вар. 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$.

Функцию $f(x)$ можно доопределить в точке $x = 0$.

2. Точки разрыва определяются из уравнения $1 - \sin x = 0$, то есть

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \begin{cases} 1 + \sin x, \\ 1 - \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Функцию $f(x)$ можно доопределить как $1 + \sin x$.

3. $f(0) = 7$, $f(\frac{\pi}{2}) = -1$. Функция $f(x)$ непрерывная и принимает на концах промежутка значения с разными знаками, поэтому она имеет корни на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$. Как в вар. 1, можно показать, что функция $f(x)$ монотонна на $[0; \frac{\pi}{2}]$, поэтому на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ корень единственный.

4. Задача решается аналогично вар. 1.

Если $a > 2$, то множество значений $[2 - a; 2 + a]$;

если $a < -2$, то $[2 + a; 2 - a]$;

если $0 < a < 2$, то $[1 - \frac{a^2}{4}; 2 + a]$;

если $-2 < a < 0$, то $[1 - \frac{a^2}{4}; 2 - a]$;

если $a = 0$, то $[1; 2]$;

если $a = \pm 2$, то $[0; 4]$.

5. $0 < \sin 2 < 1$, тогда выражение можно записать как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sin \sin \dots \sin b \quad (n \text{ синусов}), \text{ где } b = \sin 2 < 1.$$

Как доказано в вар. 1, этот предел равен 0.

Задание 5.4. Производные тригонометрических функций

Вариант 1

$$1. \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)' = \frac{\sin x(1 + \cos x) - (1 - \cos x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}, \quad f' \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 4\sqrt{3}.$$

2. Экстремальные точки определяются из уравнения $g'(y) = 0$; так как $g'(y) = -\frac{\pi}{y^2} \cos \frac{\pi}{y}$, то надо найти корни уравнения $\cos \frac{\pi}{y} = 0$. Получили, что $\pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $y = \frac{2}{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$. В этих точках производная равна нулю, при переходе через эти точки знак производной меняется.

На промежутке $[1; +\infty)$ функция имеет одну экстремальную точку $y = 2$.

3. Функция $h(z)$ имеет производную в области определения. Так как она возрастает в точке $z = 1$, то производная $h'(z)$ в этой точке неотрицательна. $h'(z) = -\frac{a}{\sin^2 az}$, поэтому $h'(1) = -\frac{a}{\sin^2 a} \geq 0$. Производная

не может равняться нулю, так как числитель обращается в нуль при $a = 0$, но при этом равен нулю знаменатель. Решим неравенство $-\frac{a}{\sin^2 a} > 0$, оно имеет следующее решение $\begin{cases} a < 0, \\ a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Пусть $a \in \{a < 0; a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. Проверим, возрастает ли функция в любой натуральной точке $z = n, n \in \mathbb{N}$. Значение производной в такой точке $h'(n) = -\frac{a}{\sin^2 an}$. Условие возрастания $-\frac{a}{\sin^2 an} > 0$,

откуда имеем $a < 0, an \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $a \neq \frac{\pi k}{n}, a < 0$. Значит, в любой натуральной точке функция возрастает.

4. Используя разность квадратов вида $a^{2n} - b^{2n} = (a^n - b^n)(a^n + b^n)$, $x(t)$ можно переписать так:

$$x(t) = \frac{\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t}{\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t} (\sec^2 t + \operatorname{tg}^2 t) (\sec^4 t + \operatorname{tg}^4 t) (\sec^8 t + \operatorname{tg}^8 t) \dots (\sec^{64} t + \operatorname{tg}^{64} t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t} (\sec^4 t - \operatorname{tg}^4 t) (\sec^4 t + \operatorname{tg}^4 t) (\sec^8 t + \operatorname{tg}^8 t) \dots (\sec^{64} t + \operatorname{tg}^{64} t) = \\
&= \frac{1}{\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t} (\sec^8 t - \operatorname{tg}^8 t) (\sec^8 t + \operatorname{tg}^8 t) \dots (\sec^{64} t + \operatorname{tg}^{64} t) = \dots = \\
&= \frac{\sec^{128} t - \operatorname{tg}^{128} t}{\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t} = \frac{1 - \sin^{128} t}{\cos^{128} t (1 - \sin^2 t)} = \frac{1 - \sin^{128} t}{\cos^{128} t} = \frac{1}{\cos^{128} t} - \operatorname{tg}^{128} t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \left(\frac{1}{\cos^{128} t} \right)' - (\operatorname{tg}^{128} t)' = -\frac{128}{\cos^{129} t} \cdot (-\sin t) - 128 \operatorname{tg}^{127} t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \\
&= 128 \left(\frac{\sin t}{\cos^{129} t} - \frac{\sin^{127} t}{\cos^{129} t} \right) = 128 \frac{\sin t - \sin^{127} t}{\cos^{129} t},
\end{aligned}$$

$$x'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -128 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{127}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{129}} = 256(1 - 2^{63}).$$

5. Например, $f(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$.

Вариант 2

$$\begin{aligned}
1. \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)' &= \frac{\cos x (1 - \sin x) + (1 + \sin x) \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}, \quad f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
&= -\frac{4}{7 - 4\sqrt{3}} = -28 - 16\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2. Так как $g'(y) = \frac{\pi}{y^2} \sin \frac{\pi}{y}$, то экстремальные точки определяются из уравнения $\sin \frac{\pi}{y} = 0$, решения которого $y = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Корни уравнения действительно являются точками экстремума, так как в этих точках производная меняет знак. На промежутке $[1; +\infty)$ функция имеет одну экстремальную точку $y = 1$ (при $k = 1$).

3. Функция $\operatorname{tg} az$ определена в точке $z = 1$, если $az \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как при этом функция имеет производную, то из условия убывания в точке $z = 1$ следует, что производная в этой точке неположительна: $h'(z) \leq 0$. Производную нетрудно вычислить: $h'(z) = \frac{a}{\cos^2 az}$. Она неположительна в точке $z = 1$, если $a \leq 0$, $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция убывает в любой натуральной точке $z = n$, $n \in \mathbb{N}$, если $h'(n) = \frac{a}{\cos^2 an} \leq 0$, то есть при $a \leq 0$, $a \neq \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Задача решается аналогично вар. 1. $x(t)$ можно записать так:

$$x(t) = \frac{1}{\sin^{128} t} - \operatorname{ctg}^{128} t.$$

Тогда производная

$$x'(t) = -\frac{128 \cos t}{\sin^{128} t} + \operatorname{ctg}^{127} t \cdot \frac{1}{\sin^2 t},$$

подставляя $t = -\frac{\pi}{4}$, вычисляем $x'(-\frac{\pi}{4}) = 256(2^{68} - 1)$.

5. Например, $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$.

Задание 5.5. Производные тригонометрических функций

Вариант 1

1. Сначала найдем точку, в которой пересекаются графики функций, где $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. Не решая уравнения, из табличных значений можно определить, что корень в первой четверти $x = \frac{\pi}{4}$. Напишем уравне-

ния касательных к графикам функций в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Для $y = \operatorname{tg} x$:
 $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, или после преобразования $y = 1 - \frac{\pi}{2} + 2x$.

Для $y = \operatorname{ctg} x$: $y = 1 + \frac{\pi}{2} - 2x$. Тангенс угла наклона α в точке $x = \frac{\pi}{4}$ касательной к графику тангенса равен 2. $\operatorname{tg} \alpha = 2$, тангенс угла наклона β касательной к графику котангенса в точке $x = \frac{\pi}{4}$ равен -2 . $\operatorname{tg} \beta = -2$. Вычислим тангенс угла между касательными: $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{4}{3}$. Тогда угол между касательными равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

2. $y' = (\cos(\arcsin x))' = (\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x})' = (\sqrt{1 - x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$y'' = -\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)' = -\frac{1}{(\sqrt{1 - x^2})^3}, \text{ тогда } (1 - x^2)y'' - xy' + y = -\frac{(1 - x^2)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} +$$

$$+ \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos(\arcsin x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} = -\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2} = 0.$$

3. Функция $y = \sin ax$ всюду имеет производную. Поэтому, если она возрастает на $[0; 1]$ и убывает на $[1; 2]$, точка $x = 1$ является точкой максимума, в которой $y' = 0$, то есть $a \cos a = 0$, откуда имеем $a = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $y' = (\frac{\pi}{2} + \pi k) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \pi k)x$, число k найдем из

условия $\begin{cases} y' > 0, & x \in (0; 1), \\ y' < 0, & x \in (1; 2). \end{cases}$ Это условие выполняется только при

$k = 0$. Значит, $a = \frac{\pi}{2}$.

4. Функция $t + \cos t$ непрерывная с множеством значений $(-\infty; +\infty)$. Значит, при любом k существует такое t_0 , что $t_0 + \cos t_0 = k$, то есть уравнение имеет корень. Докажем, что корень при любом k единственный. Рассмотрим исходное уравнение в виде $\cos t = k - t$. Правая часть уравнения — прямая с тангенсом угла наклона, равным минус единице (рис. 109).

Косинус имеет непрерывную производную, равную минус синусу, поэтому тангенс угла наклона касательной к графику синуса меняется от -1 до 1 .

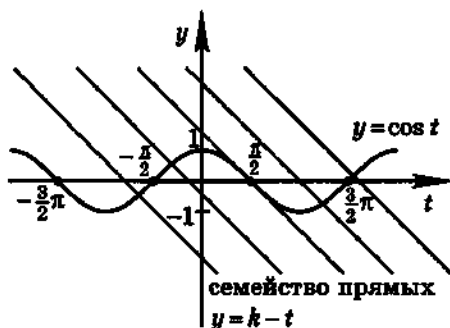


Рис. 109

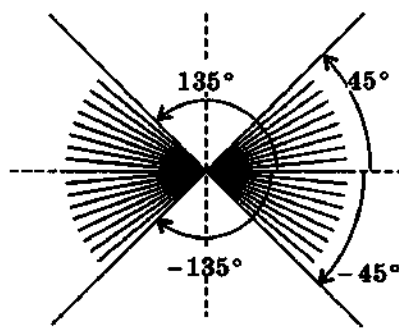


Рис. 110

Множество углов наклона можно представить следующим образом (рис. 110). Предположим, что график косинуса пересекается с прямой $y = k - t$ в двух точках A и B (см. рис. 111). В некоторой точке C дуги AB угол наклона касательной к графику равен 135° ($\operatorname{tg} 135^\circ = -1$), в этом можно убедиться параллельным переносом прямой AB до касания с дугой AB . Тогда на дуге AB найдутся точки, в которых угол наклона касательной меньше 135° , значит, тангенс угла меньше -1 . Но этого быть не может, значит, прямая $y = k - t$ не может пересекаться с графиком косинуса в двух точках. Уравнение имеет единственный корень при любом значении k .

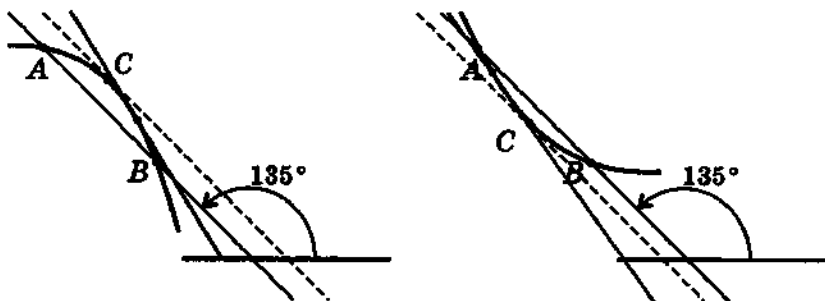


Рис. 111

5. Так как функции четные, для определенности рассмотрим $x \geq 0$. Углы наклона касательных к параболе определяются из уравнения $\operatorname{tg} \alpha = 2ax_0$, x_0 — абсциссы точки касания. Углы наклона касательной к графику косинуса $\operatorname{tg} \alpha_1 = \sin x_1$ в точке x_1 . Для $x_0 \geq 0$ $\alpha(x_0)$ меняется от 0 до ∞ . Для любого $x_1 \geq 0$ имеем $\alpha_1 \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. Ясно, что для любой касательной к графику косинуса с углом наклона $[0; \frac{\pi}{4}]$ найдется параллельная касательная к параболе (рис. 112). Пусть $a > 0$.

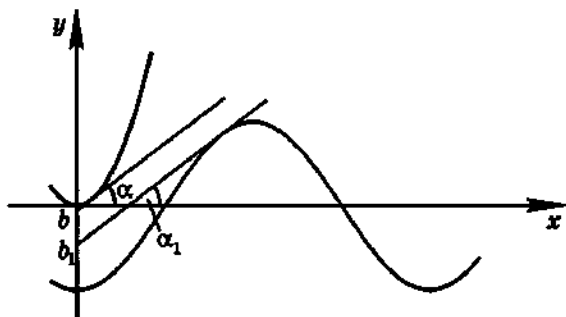


Рис. 112

Уравнения касательных: $y_1(x) = b + \operatorname{tg} \alpha \cdot x$, $y_2(x) = b_1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot x$, где $b = ax_0^2 - \operatorname{tg} \alpha \cdot x_0$, $b_1 = -\cos x_1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot x_1$. Пусть $\alpha = \alpha_1$, для совпадения касательных достаточно, чтобы

$$b = b_1 \Leftrightarrow ax_0^2 - \operatorname{tg} \alpha \cdot x_0 = -\cos x_1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow$$

$$ax_0^2 - 2ax_0^2 + \cos x_1 + 2ax_0x_1 = 0 \Leftrightarrow ax_0^2 - 2ax_0x_1 - \cos x_1 = 0.$$

Решение этого уравнения $x_0 = x_1 + \sqrt{x_1^2 + \frac{\cos x_1}{a}}$. Для любого a можно подобрать x_1 так, чтобы дискриминант уравнения был больше нуля. x_0 и x_1 , связанные полученным соотношением, лежат на одной касательной. Итак, общая касательная существует. Можно показать, что касательная существует и при $a < 0$.

Вариант 2

1. Одно из условий пересечения графиков функций: $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, откуда имеем $\operatorname{tg}^2 x = 1$ и, так как угол в четвертой четверти, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4}$. Уравнения касательных в точках пересечения:

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \\ y = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

После преобразования:

$$\begin{cases} y = -1 + \frac{\pi}{2} + x \operatorname{tg} \alpha, \\ y = -1 - \frac{\pi}{2} + x \operatorname{tg} \beta, \end{cases} \quad \text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos^2(-\frac{\pi}{4})} = 2, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{-1}{\sin^2(-\frac{\pi}{4})} = -2,$$

α и β — углы наклона касательных. Угол между ними $\beta - \alpha$.
 $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{4}{3}$. Значит, угол между касательными
 $\beta - \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

$$2. \quad y' = \cos(\arccos x) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Подставим в исходное выражение:

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' - xy' + y &= -\frac{(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sin(\arccos x) = \\ &= -\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = -\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

3. Вычислим производную $y' = (\cos ax)' = -a \sin ax$. Так как производная непрерывна, то для выполнения условий задачи достаточно, чтобы производная y' была положительной на $[1; 2]$ и отрицательной на $[0; 1]$. Значит, в точке $x=1$ производная y' равна нулю. $-a \sin a = 0$, $a = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Проверкой убеждаемся, что условию удовлетворяют $a = \pm \pi$.
4. Задача аналогична вар. 1. Решение единственно при любом k .
5. Случай $a < 0$ дает ту же картину, что и вар. 1 (рис. 113). Рассмотрим $a > 0$. Углы наклона касательных $\operatorname{tg} \alpha = 2ax_0$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\sin x_1$. Касательные $y_1 = b + 2ax_0x$, $y_2 = b_1 - \sin x_1x$. Если $\alpha = \alpha_1 \Leftrightarrow 2ax_0 = -\sin x_1$, для совпадения касательных достаточно, чтобы $b = b_1 \Leftrightarrow -ax_0^2 = \cos x_1 - 2ax_0x_1$, откуда $ax_0^2 - 2ax_0x_1 + \cos x_1 = 0$. Решение $x_0 = x_1 + \sqrt{x_1^2 - \frac{\cos x_1}{a}}$ существует для каких-то x_1 . Общая касательная существует.

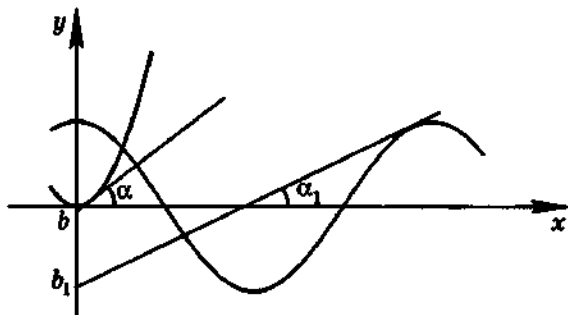


Рис. 113

Задание 5.6. Графики тригонометрических функций

Вариант 1

1. а) График $y = |0,5 - 2 \sin(0,5x - 1)|$ (рис. 114).

б) График $y = \sin^2 x + \cos x$ (рис. 115).

в) График $y = \sin(\cos x)$ (рис. 116).

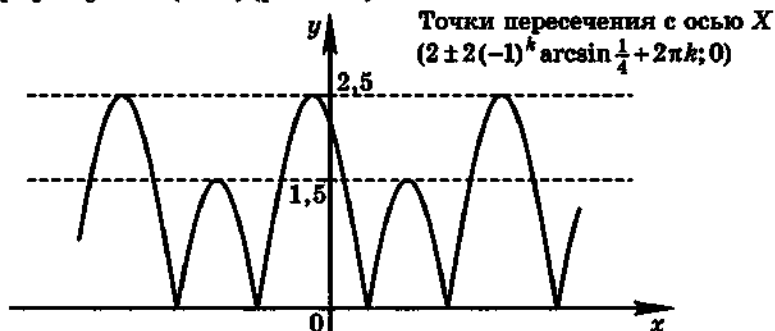


Рис. 114

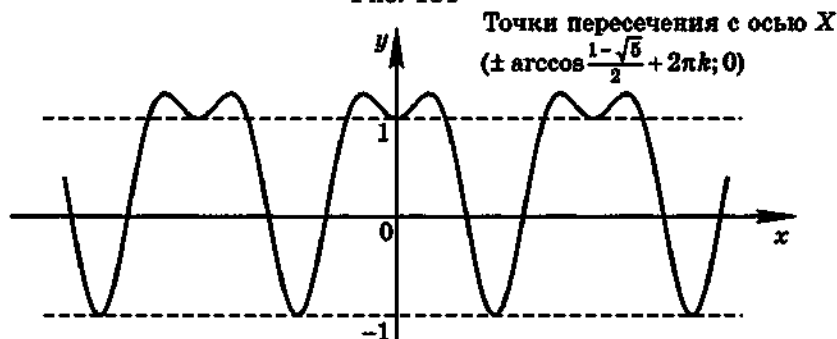


Рис. 115

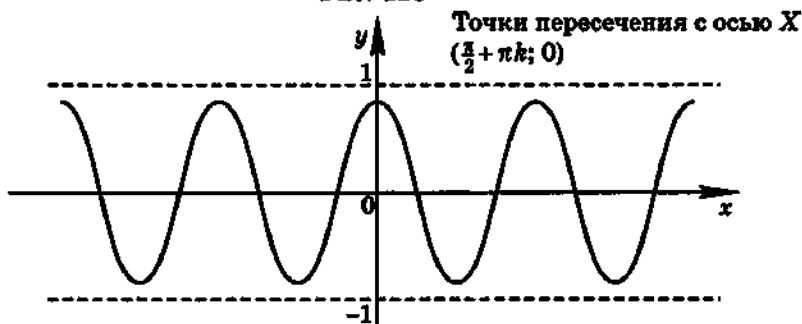


Рис. 116

2. Для всех $x \in (0; 0,5\pi)$ левая часть уравнения $\operatorname{tg} x > 0$. Определим, какие значения принимает правая часть уравнения $-5x^2 + 10x - 4,5$. Нетрудно решить систему

$$\begin{cases} x \in (0; 0,5\pi) \\ -5x^2 + 10x - 4,5 \leq 0. \end{cases} \quad \text{Это } x \in (0; 1 - \frac{1}{\sqrt{10}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{10}}; 0,5\pi).$$

На этих промежутках уравнение не может иметь решения, так как левая и правая части уравнения — числа разных знаков. Остается промежуток $x \in (1 - \frac{1}{\sqrt{10}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{10}})$. $\sqrt{10} < 3,2$, откуда следует, что

$$1 - \frac{1}{\sqrt{10}} > 0,68 > \frac{\pi}{6}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0,57. \text{ Так}$$

как $\operatorname{tg} x$ возрастает с ростом x на промежутке $[0; \frac{\pi}{2})$, левая часть уравнения при $x \in (1 - \frac{1}{\sqrt{10}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{10}})$

больше 0,57. Правая часть уравнения не может быть больше 0,5, так как наибольшее значение квадратного трехчлена при $x = 1$ равно 0,5. Уравнение не имеет корней на рассматриваемом промежутке.

В заключение можно привести графики левых и правых частей уравнения (рис. 117).

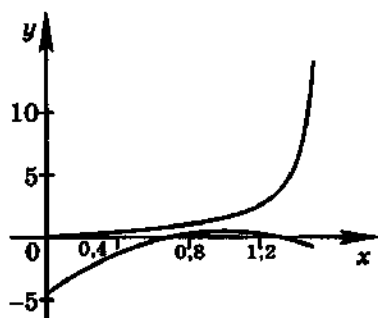


Рис. 117

Вариант 2

1. а) График $y = |2\cos(0,5x + 2) - 0,5|$ (рис. 118).
- б) График $y = \sin x + \cos^2 x$ (рис. 119).
- в) График $y = \cos(\sin x)$ (рис. 120).

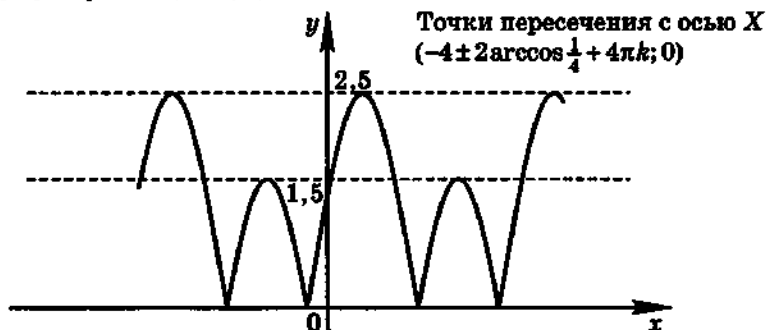


Рис. 118

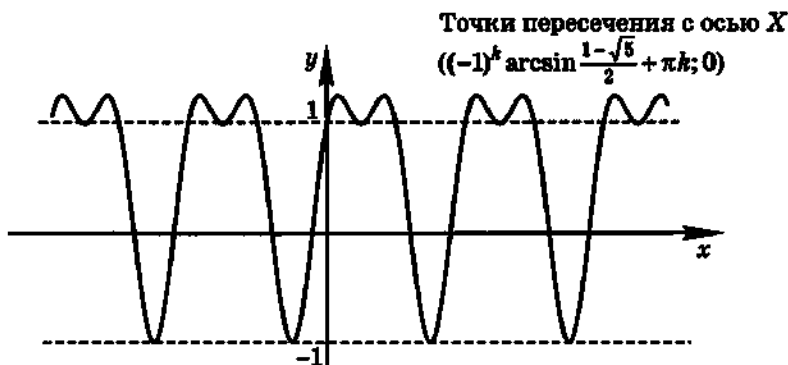


Рис. 119

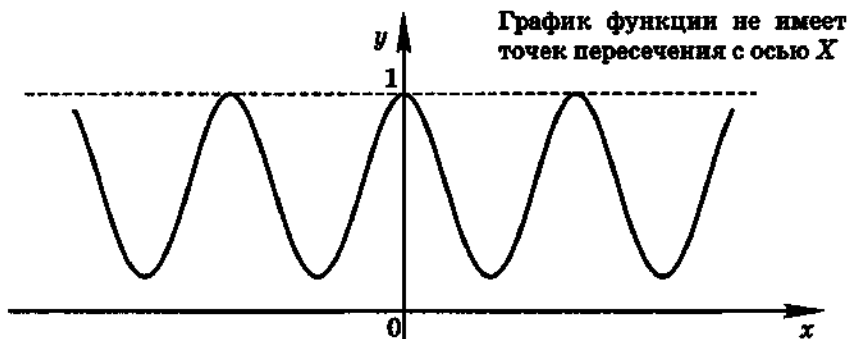


Рис. 120

2. В уравнении сделаем замену $t = -x$, тогда

$$t \in (0; 0,5\pi), \quad -\operatorname{tg} t = 5t^2 - 10t + 4,5 \text{ или } \operatorname{tg} t = -5t^2 + 10t - 4,5.$$

Это уравнение не имеет решений на промежутке $(0; 0,5\pi)$ (см. вар. 1). Следовательно, исходное уравнение тоже не имеет решений на $(-0,5\pi; 0)$.

Задание 5.7. Интегрирование тригонометрических функций

Вариант 1

1. Интегрируем исходное равенство:

$$f''(x) = \int (\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}) dx = 2 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + C.$$

Тогда

$$f'(x) = \int (2 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + C) dx = -4 \cos \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} + Cx + C_1,$$

$$f(x) = -8 \sin \frac{x}{2} + 8 \cos \frac{x}{2} + Cx^2 + C_1x + C_2.$$

Для определения неизвестных C , C_1 и C_2 надо иметь три условия, но в условии задачи их всего два, поэтому однозначного ответа нет.

$$2. \int_{-0,5\pi}^{1,5\pi} |\cos x| dx = \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \cos x dx - \int_{0,5\pi}^{1,5\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{-0,5\pi}^{0,5\pi} - \sin x \Big|_{0,5\pi}^{1,5\pi} = 2 + 2 = 4.$$

3. В интеграле можно сделать замену $t = \operatorname{tg} y$, $dt = \frac{1}{\cos^2 y} dy$, тогда иско-
мый интеграл равен $\int_0^1 \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как при $x \in (0; \frac{\pi}{2})$
 $x < \operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$.

4. Ряд несложных преобразований и замена переменной $t = \operatorname{tg} z$ по-
зволят вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^6 z dz &= \int \operatorname{tg}^4 z \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} dz = - \int \operatorname{tg}^4 z dz + \int \frac{\operatorname{tg}^4 z}{\cos^2 z} dz = \int t^4 dt - \int \operatorname{tg}^2 z \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} dz = \\ &= \frac{1}{5} t^5 - \int \frac{\operatorname{tg}^2 z}{\cos^2 z} dz + \int \operatorname{tg}^2 z dz = \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 + \int \operatorname{tg}^2 z dz = \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 + \int \frac{1 - \cos^2 z}{\cos^2 z} dz = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 z - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 z + \operatorname{tg} z - z + C. \end{aligned}$$

5. Первый из интегралов можно переписать, используя формулы при-
ведения, $\int_0^{0,5\pi} \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} dx$ и сделать в нем замену пере-
менной $z = \frac{\pi}{2} - x$, $dz = -dx$. Тогда он запишется в виде

$$- \int_{0,5\pi}^0 \sqrt{\cos z - \cos^2 z} dz = \int_0^{0,5\pi} \sqrt{\cos z - \cos^2 z} dz,$$

то есть первый интеграл равен второму.

Вариант 2

1. Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C, \quad f'(x) = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + Cx + C_1, \\ f(x) &= -\frac{\sin 2x}{8} + \frac{\cos 2x}{8} + \frac{Cx^2}{2} + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Для определения постоянных C , C_1 и C_2 надо иметь три условия,
но в задаче их всего два. Поэтому однозначного ответа нет.

$$2. \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 4.$$

3. Заменой $t = \operatorname{ctg} y$, $dt = -\frac{dy}{\sin^2 y}$ интеграл приводится к виду $\int_0^1 \frac{dt}{2+t^2}$.

Этот интеграл мы оценили в вар. 1. Он действительно меньше $\frac{1}{2}$.

4. Несложными преобразованиями и заменой $t = \operatorname{ctg} z$, $dt = -\frac{dz}{\sin^2 z}$

интеграл вычисляется:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^6 z \, dz &= \int \operatorname{ctg}^4 z \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \, dz = -\int \operatorname{ctg}^4 z \, dz + \int \frac{\operatorname{ctg}^4 z}{\sin^2 z} \, dz = \\ &= -\int t^4 \, dt - \int \operatorname{ctg}^2 z \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \, dz = -\frac{1}{5} t^5 + \int t^2 \, dt + \int \operatorname{ctg}^2 z \, dz = -\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + \\ &+ \int \frac{dz}{\sin^2 z} - \int dz = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 z + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 z - \operatorname{ctg} z - z + C. \end{aligned}$$

5. Используя формулу приведения $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ и замену $t = \frac{\pi}{2} - x$, $dt = -dx$, первый интеграл сведем ко второму, то есть они равны (см. подробнее вар. 1).

Задание 5.8. Гармонические колебания

Вариант 1

1. График заданной функции приведен на рис. 121.

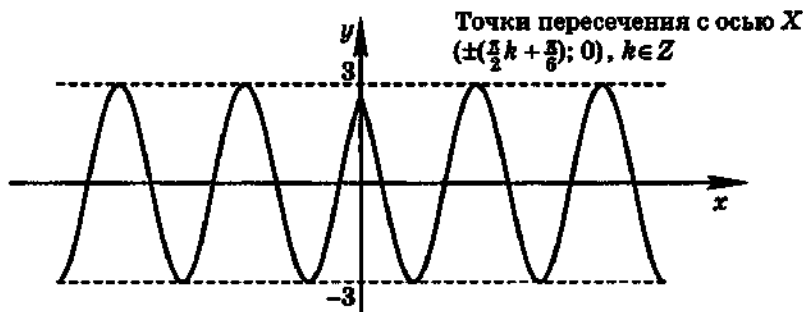


Рис. 121

2. Найдем решение уравнения в виде $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Подставим это выражение в уравнение $-C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0$. Действительно, это решение уравнения. Постоянные C_1 и C_2 найдем из условий $y(0)=1$ и $y'(0)=-1$. Решение искомого уравнения $y = \cos x - \sin x$. Это решение больше нуля при $x \in (\frac{5\pi}{4}; 2\pi] \cup [0; \frac{\pi}{4})$.
3. Решение уравнения найдем в виде $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$. Подставив в уравнение, получим

$$-C_1 a^2 \cos ax - C_2 a^2 \sin ax + \frac{1}{4} C_1 \cos ax + \frac{1}{4} C_2 \sin ax = 0,$$

$$C_1(a^2 - \frac{1}{4}) \cos ax + C_2(a^2 - \frac{1}{4}) \sin ax = 0.$$

Уравнение имеет решение при $a = \pm \frac{1}{2}$. Постоянные C_1 и C_2 определяем, используя условия $y(0) = y'(0) = 1$. $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ (или $C_2 = -2$). Решение $y = \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}$. Его можно записать в виде $y = \sqrt{5} \sin(\frac{x}{2} + \varphi)$, где $\varphi = \arctg \frac{1}{2}$. Корни функции определяются из уравнения $\sin(\frac{x}{2} + \varphi) = 0$, $\frac{x}{2} = \pi n - \varphi$, $x = 2\pi n - 2\varphi$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда площадь искомой фигуры равна $S = \int_{-2\varphi}^{2\pi-2\varphi} \sqrt{5} \sin(\frac{x}{2} + \varphi) dx = -2\sqrt{5} \cos(\frac{x}{2} + \varphi) \Big|_{-2\varphi}^{2\pi-2\varphi} = 4\sqrt{5}$.

4. Например, $f(x) = \frac{1}{3} \sin x + \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 2x$.

Вариант 2

1. График заданной функции приведен на рис. 122.

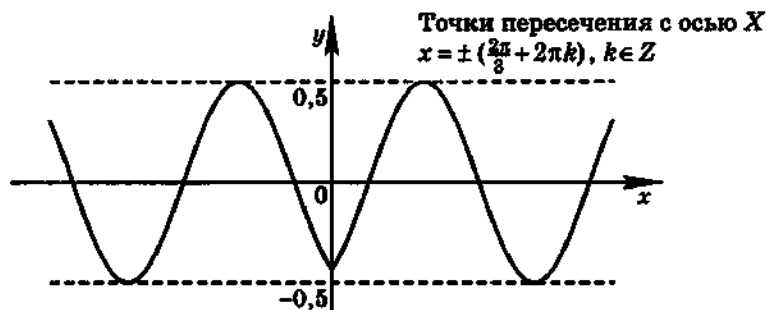


Рис. 122

2. Решение находится аналогично вар. 1: $y = -\cos x + \sin x$, оно положительно при $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4})$.
3. Решение дифференциального уравнения: $y = \cos \frac{x}{3} + 3 \sin \frac{x}{3}$. Его можно записать в виде $y = \sqrt{10} \sin(\frac{x}{3} + \varphi)$, $\varphi = \arctg \frac{1}{3}$. Корни этого решения равны $x = 3(\pi n - \varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Площадь искомой фигуры

$$S = \int_{-3\varphi}^{3(\pi-\varphi)} \sqrt{10} \sin(\frac{x}{3} + \varphi) dx = 6\sqrt{10}.$$

4. Например, $y = \frac{1}{3} \cos x + \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 2x$.

Задание 5.9. Контрольное задание

Вариант 1

1. Вычислим производные $f'(x)$ и $f''(x)$ и подставим в уравнение. Оно примет вид $\frac{\sin^3 x + 6 \cos x - \sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = 0$. Числитель — непрерывная

функция. При $\sin x = 0$ он равен -1 , а при $\sin x = 1$ равен 5 . Значит, существует значение $0 < \sin x < 1$, при котором числитель равен нулю. При таких x знаменатель не обращается в нуль. Поэтому уравнение имеет решение.

2. График функции приведен на рис. 123.

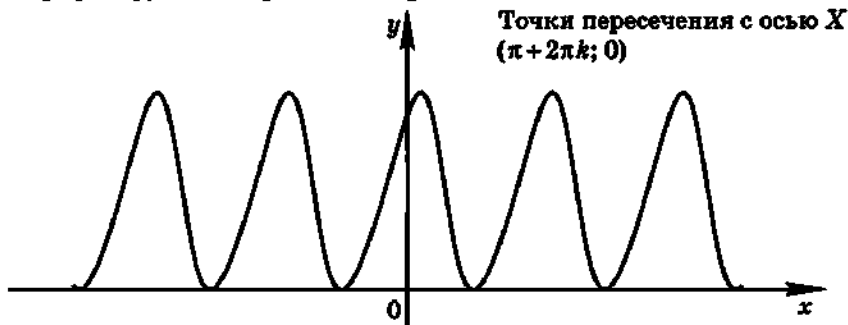


Рис. 123

3. При $t = 0$ неравенство верно. Рассмотрим части неравенства при $t \in (0; \frac{\pi}{2})$. Производные левой и правой частей неравенства соответственно равны $2\cos t + \frac{1}{\cos^2 t}$ и 3 . Покажем, что производная левой части неравенства больше производной правой части при $t \in (0; \frac{\pi}{2})$. Неравенство $2\cos t + \frac{1}{\cos^2 t} > 3$ равносильно $\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} > 2(1 - \cos t)$, последнее равносильно $\frac{4\sin^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 t} > 4\sin^2 \frac{t}{2}$, и, значит, $\frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 t} > 1$. Это неравенство верно при $t \in (0; \frac{\pi}{2})$. Таким образом, производная левой части неравенства больше производной правой части. Производные положительны, поэтому при $t \in (0; \frac{\pi}{2})$ левая часть исходного неравенства больше правой части.

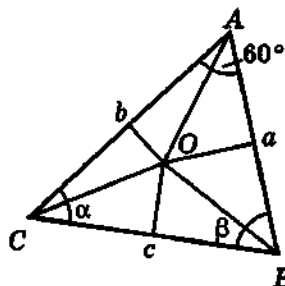


Рис. 124

4. Обозначим углы треугольника как α и β . Пусть O — центр описанной окружности. Тогда, если R — радиус этой окружности, то $OA = OB = OC = R = 1$. Тогда стороны треугольника равны $c = 2R \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, $a = 2R \sin \alpha = 2 \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta = 2 \sin \beta$. Периметр треугольника $P = \sqrt{3} + 2 \sin \alpha + 2 \sin \beta$, где $\beta = 120^\circ - \alpha$. Тогда $P = \sqrt{3} + 2(\sin \alpha + \sin(120^\circ - \alpha))$. Рассмотрим периметр P как функцию от угла α . Так как $P(\alpha)$ имеет производную, то в точке наибольшего значения $P'(\alpha) = 0$.

$$P'(\alpha) = 2 \cos \alpha - 2 \cos(120^\circ - \alpha) = 0,$$

что равносильно

$$\sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

откуда имеем $\alpha = 60^\circ$. Наибольшее значение периметра $P = 3\sqrt{3}$.

5. Уравнения касательных к графику исходной функции в точках с абсциссами $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = -\frac{\pi}{4}$ соответственно $y = 2 - \pi + 4x$ и $y = 2 - \pi - 4x$.

Фигура симметрична относительно оси OY (рис. 125). Площадь фигуры равна

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 2 + \pi - 4x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2 + \pi - 4x \right) dx = \\ &= 2 \left[\operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2(\pi - 2)x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 4x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right] = 2 + \frac{\pi - 2}{2} \pi - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - \pi + 2. \end{aligned}$$

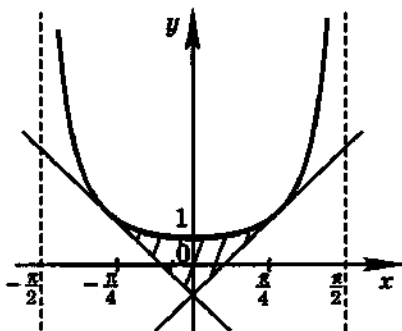


Рис. 125

6. Пусть графики $y = a \sin x$ и $y = \frac{1}{a} \cos x$ пересекаются в точке x_0 ,

$$a \sin x_0 = \frac{1}{a} \cos x_0. \text{ Тогда искомая площадь } S = \int_0^{x_0} a \sin x dx + \frac{1}{a} \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

Экстремальные значения площади $S(a)$ можно определить из усло-

$$\text{вия } S'_a = 0, \text{ что равносильно условию } \left(\int_0^{x_0} a \sin x dx + \frac{1}{a} \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right)' \Big|_a =$$

$$= (a - a \cos x_0 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \sin x_0)' \Big|_a = 0, \text{ откуда имеем}$$

$$1 - \cos x_0 + a \sin x_0 \cdot x'_0 \Big|_a - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sin x_0 - \frac{1}{a} \cos x_0 \cdot x'_0 \Big|_a = 0,$$

$$x'_0 \Big|_a \cdot (a \sin x_0 - \frac{1}{a} \cos x_0) + 1 - \cos x_0 - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sin x_0 = 0.$$

Так как x_0 удовлетворяет условию $a \sin x_0 = \frac{1}{a} \cos x_0$, то последнее равенство можно записать так: $(a^2 - 1)(1 - (a^2 + 1) \sin x_0) = 0$. Это равенство может быть выполнено при $a^2 = 1$ или $1 - (a^2 + 1) \sin x_0 = 0$. Так как $a > 0$, то $a = 1$. В этом случае экстремальное значение площади $S = 2 - \sqrt{2}$. Из второго уравнения $\sin x_0 = \frac{1}{a^2 + 1}$, из определения x_0

$\sin x_0 = \frac{\cos x_0}{a^2}$. Имеем систему $\begin{cases} \sin^2 x_0 = \frac{1}{(a^2+1)^2}, \\ \operatorname{tg}^2 x_0 = \frac{1}{a^4}. \end{cases}$ Подставляя из пер-

вого уравнения $\sin^2 x_0$ во второе, имеем $\frac{1}{(a^2+1)^2-1} = \frac{1}{a^4}$, или $(a^2+1)^2 = a^4 + 1$. У этого уравнения нет ненулевых решений. Значит, экстремальное значение площади для одного случая $a=1$ $S = 2 - \sqrt{2}$.

7. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \sin \pi x \, dx$, приближенное значение которого

по формуле левых прямоугольников равно $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. Предел

этой суммы при $n \rightarrow \infty$ равен $\int_0^1 \sin \pi x \, dx = -\cos \pi x \Big|_0^1 = 2$.

Вариант 2

1. $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $f'(x) = \frac{-2}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$, $f''(x) = \frac{6 \cos x}{\sin^4 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Под-

ставляем эти значения в уравнение, и оно примет вид $\frac{\cos^3 x + \cos^2 x + 6 \cos x + 1}{\sin^2 x} = 0$. На промежутке $[0; \pi]$ функция в числителе

уравнения меняет знак с $++$ на $--$. Значит, числитель имеет корни. Так как корни не равны πk , $k \in \mathbb{Z}$, при которых $\sin x$ обращается в нуль, исходное уравнение имеет решение.

2. График этой функции приведен на рис. 126. Точки пересечения с осью абсцисс те же, что и в вар. 1. Отметим, что рассматриваемый график получается из графика вар. 1 отражением относительно оси Y .

3. Верно. Можно доказать аналогично вар. 1. Можно и следующим образом. Рассмотрим разность между левыми частями равенства

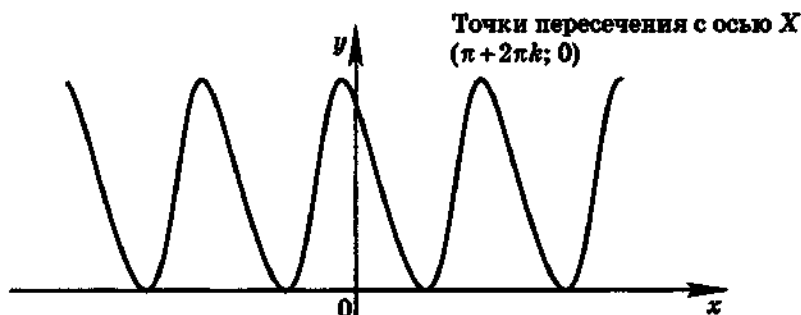


Рис. 126

второго и первого вариантов. Она равна $\operatorname{tg} t - \sin t$, но на промежутке $(0; 0,5\pi)$ $\operatorname{tg} t \geq \sin t$, поэтому левая часть рассматриваемого неравенства больше на промежутке $(0; 0,5\pi)$ левой части неравенства вар. 1. Так как в первом варианте неравенство верно, то и рассматриваемое неравенство верно.

4. Стороны треугольника (рис. 127) равны

$$a = 2 \sin \alpha, b = 2 \sin \beta, c = 2 \sin 120^\circ = \sqrt{3}.$$

Периметр треугольника равен

$$P = 2 \sin \alpha + 2 \sin \beta + \sqrt{3},$$

$$P(\alpha) = 2 \sin \alpha + 2 \sin(60^\circ - \alpha) + \sqrt{3}.$$

Экстремальная точка определяется из условия

$$P'(\alpha) = 2 \cos \alpha - 2 \cos(60^\circ - \alpha) = 0.$$

Откуда следует $30^\circ - \alpha = 0$, $\alpha = 30^\circ$.

Наибольший периметр равен

$$P = 2 \sin 30^\circ + 2 \sin 30^\circ + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

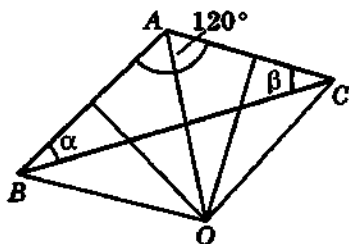


Рис. 127

5. Для $y = \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ делаем замену переменной $t = x - \frac{\pi}{2}$, тогда

$$y(t) = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t, \text{ а координаты точек касания } t = -\frac{\pi}{4} \text{ и } t = \frac{\pi}{4}. \text{ Задача}$$

свелась к вар. 1. Значит, искомая площадь равна $\frac{\pi^2}{4} - \pi + 2$.

6. В этой задаче можно заменить параметр a ($a > 0$) на $a_0 = \frac{1}{a}$, тогда условия имеют вид $y \leq \frac{1}{a_0} \cos x$, $y \leq a_0 \sin x$, $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 0,5\pi$. Задача свелась к вар. 1. Экстремальное значение площади равно $2 - \sqrt{2}$.

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}}{2\pi} = \frac{3}{2} \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx = 1.$$

Тема 6

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задание 6.1. Уравнения и неравенства для тангенса и котангенса

Вариант 1

1. а) Уравнение можно привести к виду $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 0$, упрощая, получаем

$$\begin{cases} \frac{\cos 2x}{2 \cos^2 x} = 0, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Решение системы: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$.

б) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} tgy - a = 1 - tgy, \\ 1 - tgy \geq 0, \end{cases} \text{ упрощая которую, имеем } \begin{cases} tgy = \frac{1+a}{2}, \\ tgy \leq 1. \end{cases}$$

Система имеет решения только при условии $\frac{1+a}{2} \leq 1$, что равносильно $a \leq 1$. Решение $y = \arctg \frac{(1+a)}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Рассмотрим выражение в левой части уравнения

$$|tgt + ctgt| = |tgt + \frac{1}{tgt}|.$$

Сумма взаимно обратных величин $tgt + \frac{1}{tgt}$ либо не меньше 2, либо не больше -2, в зависимости от знака tgt . Тогда $|tgt + \frac{1}{tgt}| \geq 2$. Но правая часть уравнения $2 - tg^2 t \leq 2$. И так как левая и правая части уравнения не равны 2 при одних и тех же t , то уравнение не имеет решений.

2. а) $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) > 0$. Решаем это неравенство:

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k) \cup (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k).$$

б) Область допустимых значений определяется из неравенства $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 2 \geq 0$, которое можно записать как

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2) \geq 0.$$

Так как при любых x квадратный трехчлен относительно $\operatorname{tg} x$ больше нуля, то допустимые значения определяются из неравенства $\operatorname{tg} x \geq 1$.

При $\operatorname{tg} x \geq 1$ левая часть неравенства тоже неотрицательна, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$(\operatorname{tg} x - 1)^2 < \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 2 \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + 3) > 0.$$

Откуда имеем $\operatorname{tg} x - 1 > 0$. Значит, исходное неравенство имеет решения $\operatorname{tg} x > 1$, $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2})$.

Вариант 2

1. а) Уравнение перепишем в виде $\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0$, решения которого определяются из системы $\begin{cases} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = 0, \\ \sin x \neq 0, \end{cases}$ это $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$.

б) Решения уравнения удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} y - 1 = a - \operatorname{ctg} y, \\ \operatorname{ctg} y \geq 1, \end{cases} \quad \text{откуда имеем} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} y = \frac{a+1}{2}, \\ \operatorname{ctg} y \geq 1. \end{cases}$$

Решения существуют только при $a \geq 1$ и равны $y = \operatorname{arccotg} \frac{(a+1)}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Аналогично вар. 1 уравнение не имеет решений.

2. а) $\operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x - 1) < 0$, откуда имеем $0 < \operatorname{ctg} x < 1$, то есть

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}.$$

б) Область допустимых значений определяется из неравенства $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x - 2 \geq 0$. Разложив на множители, приходим к неравенству $(\operatorname{ctg} x - 1)(\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + 2) \geq 0$, которое равносильно неравенству $\operatorname{ctg} x \geq 1$. При $\operatorname{ctg} x \geq 1$ левая часть неравенства неотрицательна, и исходное неравенство можно заменить на $(\operatorname{ctg} x - 1)^2 < \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x - 2$, которое имеет решение $\operatorname{ctg} x > 1$, $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\pi; \frac{5\pi}{4})$.

Задание 6.2. Уравнения и неравенства для синуса

Вариант 1

1. а) Уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \neq 1, \end{cases}$$

решая их, находим корни на промежутке $[0; 2\pi]$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 2\pi$.

б) Так как каждое из слагаемых в левой части уравнения не может быть больше 1, то уравнению удовлетворяют только такие x , при которых одновременно

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 3x = 1, \text{ откуда имеем} \\ \sin 7x = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \\ 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi l}{3}, \quad k, l, m \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi m}{7}, \end{cases}$$

Необходимо определить такие $k, l, m \in \mathbb{Z}$, чтобы значения x при этом были равны. Приравнявая выражения, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2k = \frac{1}{6} + \frac{2l}{3}, \\ \frac{1}{6} + \frac{2l}{3} = \frac{1}{14} + \frac{2m}{7}, \end{cases} \quad \text{что равносильно} \quad \begin{cases} 2l = 6k + 1, \\ 3m = 7l + 1. \end{cases}$$

В первом уравнении в левой части четное число при любом l , а справа нечетное число при любом k . Это означает, что целых чисел l и k , удовлетворяющих системе, нет. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

в) Нетрудно определить, что $\sin x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Из этого уравнения получаем $\sin x = 0$, то есть $x = \pi l, l \in \mathbb{Z}$.

2. а) $\sin^2 2x - \frac{1}{4} < 0$, что равносильно $(\sin 2x - \frac{1}{2})(\sin 2x + \frac{1}{2}) < 0$, то есть $-\frac{1}{2} < \sin 2x < \frac{1}{2}$, решения на промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$ $x \in [0; \frac{\pi}{12}) \cup (\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}]$.

б) Неравенство можно записать в виде $4y^2 - 4y + 1 > \sin y - 1$ или $(2y - 1)^2 > \sin y - 1$. Так как при любом y $(2y - 1)^2 \geq 0$, а $\sin y - 1 \leq 0$, то любое y — решение.

Вариант 2

1. а) Исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x \neq -1, \\ \sin 0,5x = 0, \\ \sin x \neq -1, \end{cases}$$

решая их, находим корни $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$.

б) Уравнение решений не имеет. Решение аналогично вар. 1.

в) Из уравнения имеем $\sin x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, последнее уравнение решений не имеет. Поэтому не имеет решений и исходное уравнение.

2. а) Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\sin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решением неравенства на промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$ являются все x из этого промежутка.

б) Неравенство можно записать в виде $-1 - \sin y < (2y + 1)^2$. Так как правая часть неравенства при любом y неотрицательна, а левая часть неположительна, любое y — решение.

Задание 6.3. Уравнения и неравенства для косинуса

Вариант 1

1. а) Решая систему
$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos(x-1) \neq 0, \text{ находим корни } x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}. \\ \cos(x+1) \neq 0, \end{cases}$$

б) Пусть $\cos t \leq -0,5$, тогда, раскрывая модули, получим уравнение $-2\cos t = \frac{2}{3}$, значит, $\cos t = -\frac{1}{3}$, но $-\frac{1}{3} > -0,5$, поэтому в этом случае нет решений.

Случай $-0,5 < \cos t \leq 0,5$ приводит к уравнению $1 = \frac{2}{3}$, которое решений не имеет.

Случай $\cos t > 0,5$, $\cos t = \frac{1}{3} < 0,5$ тоже нет решений. Значит, исходное уравнение не имеет решений.

в) Это уравнение имеет решение только при $a \geq 1$. $\cos z = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$,
 $z = \pm \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2. а) Неравенство нетрудно привести к виду $\left(\cos \frac{x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$, которое имеет решения $\cos \frac{x}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ либо $\cos \frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решая первое неравенство, находим $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 8\pi k; \frac{2\pi}{3} + 8\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Решая второе, находим $x \in \left(\frac{10\pi}{3} + 8\pi k; \frac{14\pi}{3} + 8\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. На промежутке $[0; 2\pi]$ исходное неравенство имеет решение $x \in [0; \frac{2\pi}{3})$.

б) Квадратный трехчлен относительно $\cos y$ $\cos^2 y - \cos y - 1$ неотрицателен при $\cos y \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, неположителен при $\cos y \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

В первом случае решаем

$$\begin{cases} \cos^2 y - \cos y - 1 > \cos y, \\ \cos y \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

что равносильно

$$\begin{cases} (\cos y - 1 - \sqrt{2})(\cos y - 1 + \sqrt{2}) > 0, \\ \cos y \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда следует} \quad \begin{cases} \cos y < 1 - \sqrt{2}, \\ \cos y \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

значит, $\cos y \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — часть решения.

Во втором случае

$$\begin{cases} -\cos^2 y + \cos y + 1 > \cos y, \\ \cos y \geq \frac{-\sqrt{5}+1}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда следует} \quad \begin{cases} \cos^2 y < 1, \\ \cos y \geq \frac{-\sqrt{5}+1}{2}. \end{cases}$$

Значит, решение $\frac{-\sqrt{5}+1}{2} \leq \cos y < 1$. Объединяя первый и второй случаи, имеем $-1 \leq \cos y < 1$. Решение исходного неравенства $y \in R$, $y \neq 2\pi k$, $k \in Z$.

Вариант 2

1. а) Решения: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

б) Уравнение не имеет решений. Аналогично вар. 1.

в) Уравнение имеет решения только при $a \leq -1$,

$$z = \pm \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a}}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

2. а) Решение $x \in [0; \frac{\pi}{6}] \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ (см. вар. 1).

б) Заменяя в неравенстве $\cos y$ на $-\cos y$, получаем неравенство варианта 1. Поэтому решение исходного неравенства — все y , такие, что $\cos y \neq -1$, то есть $y \in R$, $y \neq 2\pi k + \pi$, $k \in Z$.

Задание 6.4. Уравнения для синуса и косинуса

Вариант 1

1. а) Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x = \cos x, \\ \sin 2x \neq 1, \end{cases}$ откуда получаем,

что $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z, \\ \sin 2x \neq 1. \end{cases}$ Эта система решений не имеет. Значит, исход-

ное уравнение решений не имеет.

б) Уравнение имеет вид $\frac{1}{\cos x} - 6 \cos x = 4 \sin x$, откуда получим равносильное $\frac{1}{\cos^2 x} - 6 = 4 \operatorname{tg} x$. Выразив $\cos^2 x$ через $\operatorname{tg}^2 x$, подставим в уравнение и получим $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 5 = 0$, $(\operatorname{tg} x - 5)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$. Откуда $\operatorname{tg} x = 5$, $\operatorname{tg} x = -1$. Решение $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \arctg 5 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Решим два уравнения $\sin x + \cos x = \pm(\cos x - \sin x)$ и из их решений выберем подходящие.

1) $\sin x + \cos x = \cos x - \sin x$, откуда $x = \pi k$. Исходному уравнению удовлетворяют $x = 0$, $x = 2\pi$.

2) $\sin x + \cos x = -\cos x + \sin x$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, подходящее решение $x = \frac{3\pi}{2}$.

Решения исходного уравнения: $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$.

г) Уравнение можно свести к системе

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x, \\ \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x \neq 0, \end{cases}$$

которая после несложного преобразования примет вид

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos x \neq \sin x, \end{cases}$$

откуда решение $\operatorname{tg} 2x = 1$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Приведем исходное уравнение к виду $\sqrt{2} \sin(z + \frac{\pi}{4}) = a$. Значит, $\sin(z + \frac{\pi}{4}) = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Это уравнение имеет единственное решение при $a = \pm\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. а) Уравнение решений не имеет.

б) Уравнение можно свести к виду $\frac{1}{\sin^2 x} - 6 = 4 \frac{\cos x}{\sin x}$ или, заменив $\sin^2 x$ через $\operatorname{ctg}^2 x$, $\operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x - 5 = 0$. Откуда имеем $\operatorname{ctg} x = -5$ либо $\operatorname{ctg} x = 1$. Решения уравнения: $x = \operatorname{arccotg}(-5) + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Решения: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

г) Уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x, \\ \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x \neq 0, \end{cases}$$

которая примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1, \\ \sin x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x \neq -1. \end{cases}$$

Отсюда получаем решения $x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

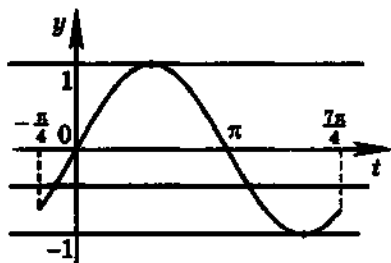


Рис. 128

2. Так как $\sin z - \cos z = \sqrt{2} \sin(z - \frac{\pi}{4})$, то уравнение можно записать следующим образом $\sqrt{2} \sin(z - \frac{\pi}{4}) = a \Leftrightarrow \sin(z - \frac{\pi}{4}) = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Получили простое уравнение для синуса, которое надо решить на промежутке $[0; 2\pi]$. После замены переменной $t = z - \frac{\pi}{4}$: то $t \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$ и уравнение $\sin t = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

График $y = \sin t$ на рис. 128.

Длина промежутка $[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$ равна 2π — периоду синуса. Уравнение $\sin t = \frac{a}{\sqrt{2}}$ имеет единственный корень, если $\frac{a}{\sqrt{2}} = \pm 1 \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{2}$.

Задание 6.5. Уравнения для всех тригонометрических функций

Вариант 1

1. а) Уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \neq -1, \\ x \neq \frac{\pi}{2}, x \in [0; \pi], \\ \sin 2x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \neq -1, \\ x \neq \frac{\pi}{2}, x \in [0; \pi], \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{4}, \\ x \neq \frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}, \\ x = \pi. \end{cases}$$

б) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ 1 + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x (\sin x - \cos x) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x = 0, \\ \sin x > 0, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

в) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos^2 x (1 + \cos x) - \sin^2 x (1 + \sin x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1, \\ \sin x \neq 0, \\ (1 - \sin^2 x)(1 + \cos x) - (1 - \cos^2 x)(1 + \sin x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1, \\ \sin x \neq 0, \\ (1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \cos x) - (1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1, \\ \sin x \neq 0, \\ (1 + \sin x)(1 + \cos x)(1 - \sin x - 1 + \cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1, \\ \sin x \neq 0, \\ (1 + \sin x)(1 + \cos x)(\cos x - \sin x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, для того чтобы оно имело решение, необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным: $D = 4a^2 \cos^2 4x - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2(\cos^2 4x - 1) \geq 0$. Так

как $\cos^2 4x \leq 1$, то $D > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ \cos^2 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Если $a = 0$,

решения $\operatorname{tg} x = 0$ существуют. Если $a \neq 0$ и $x = \frac{\pi k}{4}$ ($k = 2n+1$), подставкой проверим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}(2n+1) + 2a \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}(2n+1))(-1) + a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2a \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n) + a^2 = 0 \Leftrightarrow 1 \pm 2a + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Это означает, что при $a = \pm 1$ решения существуют. Итак, искомые $a = 0, \pm 1$.

3. Уравнение запишем в виде

$$\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} - a(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) \left(\frac{1}{\cos x} - a \right) = 0.$$

Ясно, что при любом a имеется решение

$$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $x \in [0; 2\pi]$, решение $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$. Другие решения возможны из уравнения $\frac{1}{\cos x} - a = 0$. Если $a = 0$, оно не имеет решений.

Если $a \neq 0$, его можно записать $\cos x = \frac{1}{a}$, откуда ясно, что при $|\frac{1}{a}| \leq 1$ имеются решения. $|\frac{1}{a}| \leq 1 \Leftrightarrow |a| \geq 1$. Решение $x = \pm \arccos \frac{1}{a}$.

Подсчитаем количество решений. Если $a = \sqrt{2}$, то в решении $x = \pm \arccos \frac{1}{a}$, одно решение $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ повторяет одно из ранее полученных решений.

Если $a = -\sqrt{2}$, решения $x = \frac{5\pi}{4}$ тоже повторяются.

Поэтому число решений следующее:

- 1) $a = 0$, два решения;
- 2) $a = \sqrt{2}$, три решения;
- 3) $a = -\sqrt{2}$, три решения;
- 4) $|a| < 1$, два решения;
- 5) $|a| \geq 1, |a| \neq \sqrt{2}$, четыре решения.

График числа решений n приведен на рис. 129.

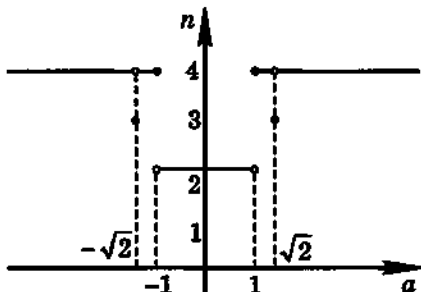


Рис. 129

Вариант 2

1. а) Решения $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

б) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ 1 + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \operatorname{tg} x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

в) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 x (1 + \sin x) - \cos^2 x (1 + \cos x) = 0, \\ \sin x \neq -1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow (\text{см. вар. 1})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \sin x)(1 + \cos x)(\cos x - \sin x) = 0, \\ \sin x \neq -1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Уравнение имеет решения при $a=0$, $a=\pm 1$. Решение аналогично вар. 1.

3. Если заменить x на $-x$, уравнение сведется к вар. 1. Количество решений при соответствующих a то же, что и в вар. 1.

Задание 6.6. Неравенства для всех тригонометрических функций

Вариант 1

1. а) Исходное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x \cdot \sin 4x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \frac{\sin x}{\sin 4x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{так как } \sin x \geq 0) \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}, x \in [0; \pi], \\ \frac{1}{\sin 4x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}, x \in [0; \pi], \\ \sin 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}).$$

б) Если $a=0$, то неравенство сводится к $\cos z \geq 0$, тогда

$$z \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $a=1$, то $(\cos z - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \cos z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство равносильно $a(\cos z - a)(\cos z - \frac{1}{a}) \leq 0$, так как $a > 0$, $\cos z - \frac{1}{a} < 0$, то $\cos z - a \geq 0 \Leftrightarrow \cos z \geq a$. Следовательно,

$$z \in [-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

в) Пишем равносильное неравенство: $|\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}| > \sin x$, следовательно, $|\sin x| |1 - \frac{1}{\cos x}| > \sin x$. На указанном промежутке неравенство примет вид $\sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x} > \sin x \Leftrightarrow 1 - \cos x > \cos x \Leftrightarrow 0 < \cos x < \frac{1}{2}$, откуда решение $x \in (\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$.

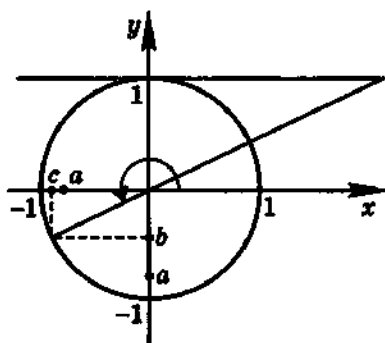


Рис. 130

2. Рассмотрим $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, тогда исходное неравенство равносильно следующему: $\frac{\pi}{\cos x} > \pi(\frac{1}{4} + k) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{1}{4} + k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Так как $\cos x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, то для любого k в некоторой окрестности $x = \frac{\pi}{2}$ неравенство верно. Это означает, что существуют решения этого неравенства.
3. Нет, например, если угол $\pi < z < \frac{3\pi}{2}$, то может быть такое $a < 0$, что $b = \sin z > a$, $c = \cos z < a$ (рис. 130).

Вариант 2

1. а) Решение $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4})$.

б) Если $a = 0$, то решаем $\cos z \geq 0$, тогда $z \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $a = -1$, то решение из неравенства $-(\cos z + 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Если $-1 < a < 0$, $a(\cos z - a)(\cos z - \frac{1}{a}) \leq 0$. Так как $\cos z - \frac{1}{a} > 0$ и $a < 0$, то $\cos z - a \geq 0 \Leftrightarrow z \in [-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Неравенство равносильно следующему $|\sin x| - 1 + \frac{1}{\cos x} > -\sin x$, следовательно, $(-\sin x)(\frac{1}{\cos x} - 1) > -\sin x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} - 1 > 1 \Leftrightarrow 0 < \cos x < \frac{1}{2}$. Следовательно, $x \in (-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3})$.

2. Неравенство можно записать так: $\operatorname{ctg}(\pi \frac{1}{\sin x}) > 1$, и если $x > 0$, то оно

равносильно $\frac{\pi}{\sin x} < \frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{4} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $x \rightarrow 0$, то

$\sin x \rightarrow 0$, $\frac{1}{\sin x} \rightarrow \infty$. Какое бы малое

$x > 0$ мы не взяли, найдется $k \in \mathbb{N}$, такое, что неравенство верно. Значит, в любой малой окрестности $x = 0$, $x > 0$, существует решение.

3. Не следует. Например, на рис. 131 угол $z \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$,

$\cos z = c > a$, $\sin z = b < a$.

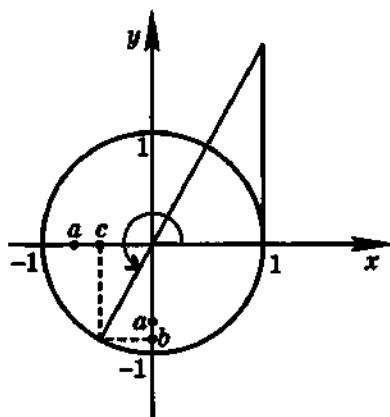


Рис. 131

Задание 6.7. Контрольное задание

Вариант 1

1. а) Известно, что значения косинусов по модулю не превосходят единицы и произведение чисел, модули которых меньше единицы, — число, модуль которого меньше 1. Поэтому уравнение имеет решения x такие, что выполнены два равенства:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos(\pi\sqrt{x-4})=1, \\ \cos(\pi\sqrt{x})=1, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} \cos(\pi\sqrt{x-4})=-1, \\ \cos(\pi\sqrt{x})=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \pi\sqrt{x-4}=2\pi k, \\ \pi\sqrt{x}=2\pi l, \end{cases} & k, l \in \mathbb{Z}, \\ \begin{cases} \pi\sqrt{x-4}=\pi+2\pi n, \\ \pi\sqrt{x}=\pi+2\pi m \end{cases} & n, m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{x-4}=2k, \\ \sqrt{x}=2l, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x-4}=1+2n, \\ \sqrt{x}=1+2m \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-4=4k^2, k \geq 0, \\ x=4l^2, l \geq 0, \end{cases} & k, l \in \mathbb{Z}, \\ \begin{cases} x-4=(1+2n)^2, n \geq 0, \\ x=(1+2m)^2, m \geq 0, \end{cases} & n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Первая система имеет решение, если $l^2 = k^2 + 1 \Leftrightarrow (l-k)(l+k)=1$, следовательно, $\begin{cases} l-k=1, \\ l+k=1 \end{cases} \Rightarrow l=1, k=0$. Вторая система имеет решение, если

$$\begin{aligned} & 4 + (1+2n)^2 = (1+2m)^2 \Leftrightarrow 4 = (1+2m)^2 - (1+2n)^2 \Leftrightarrow 4 = (2m-2n)(2m+2n+2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1 = (m-n)(m+n+1) \Rightarrow \begin{cases} m-n=1, \\ m+n+1=1, \end{cases} \text{ нет целых решений.} \end{aligned}$$

Итак, $x=4$ — решение ($l=1, k=0$).

б) Рассмотрим тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Так как $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$, то $|\sin^3 x| \leq \sin^2 x$, $|\cos^3 x| \leq \cos^2 x$ и при сложении этих неравенств получим $\sin^3 x + \cos^3 x \leq 1$, равенство достигается только при условии

$$\begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x, \\ \cos^3 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Решения квадратного уравнения для синуса $\begin{cases} \sin x = a^2 - 4, \\ \sin x = 1. \end{cases}$

Уравнение $\sin x = 1$ имеет одно решение $x = \frac{\pi}{2}$ на промежутке $[\frac{\pi}{6}; 2\pi]$.

Второе решение из уравнения $\sin x = a^2 - 4$. Оно должно иметь ровно одно решение на $[\frac{\pi}{6}; 2\pi]$. Ясно, что если значение синуса $a^2 - 4$ отрицательно, то это значение на промежутке $[\pi; 2\pi]$ берется дважды, то есть имеем два решения. Поэтому этот случай не подходит.

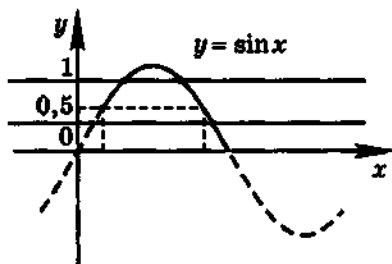


Рис. 132

Если $\sin x = 0$ при $a^2 - 4 = 0$, уравнение также имеет два решения.

Пусть $1 \geq a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow 4 < a^2 \leq 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < |a| \leq \sqrt{5}$. График функции

$y = \sin x$ для $x \in [\frac{\pi}{6}; \pi]$ см. на рис. 132.

Решаем уравнение $\sin x = b$ ($b = a^2 - 4$) на промежутке $x \in [\frac{\pi}{6}; \pi]$. Если

$\frac{1}{2} < a^2 - 4 < 1$, то уравнение имеет два решения, если $a^2 - 4 = 1$ — одно решение

решение $x = \frac{\pi}{2}$, если $0 < a^2 - 4 < \frac{1}{2}$ — одно решение $x = \arcsin(a^2 - 4)$. При $a^2 - 4 = 1$ решение $x = \frac{\pi}{2}$ повторяет первое решение, этот случай не подходит. Случай $0 < a^2 - 4 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < |a| \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$ дает одно решение, отличное от $x = \frac{\pi}{2}$. При этом исходное уравнение имеет ровно два решения. Итак, при $2 < |a| \leq \sqrt{4,5}$ уравнение имеет два решения.

3. а) Часть решения: $\begin{cases} \cos z \geq \sin z, \\ \sin z < 0,5, \end{cases}$ откуда $z \in [0; \frac{\pi}{6}]$. Другая часть

решения определяется из условия

$$\begin{cases} \cos z - \sin z \geq (\sin z - 0,5)^2, \\ \sin z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos z - \sin z \geq \sin^2 z - \sin z + 0,25, \\ \sin z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 z + \cos z - 1,25 \geq 0, \\ \sin z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos z + \frac{\sqrt{6}+1}{2})(\cos z - \frac{\sqrt{6}-1}{2}) \geq 0, \\ \sin z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos z \geq \frac{\sqrt{6}-1}{2}, \\ \sin z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin z \leq \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{6}-1}{2})^2}, \\ \sin z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin z \leq \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{6}-3}, \\ \sin z \geq 0,5. \end{cases}$$

Так как $1 > \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{6}-3} > 0,5$, то решение

$$\arcsin 0,5 \leq z \leq \arcsin 0,5\sqrt{2\sqrt{6}-3}.$$

Объединяя решения, имеем для исходного неравенства

$$z \in [0; \arcsin 0,5\sqrt{2\sqrt{6}-3}].$$

Решение можно записать, используя арккосинус,

$$z \in [0; \arccos 0,5(\sqrt{6}-1)].$$

б) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} a \sin t + \cos t > \frac{1}{\cos t}, \\ a \geq 0, \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a \sin t \cos t - \sin^2 t}{\cos t} > 0, \\ a \geq 0, \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t(a - \operatorname{tg} t) > 0, \\ a \geq 0, \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \operatorname{tg} t > 0, \\ a \geq 0, \\ t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Откуда при $a=0$ имеем решение $t \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Если $a > 0$, то $\begin{cases} \operatorname{tg} t < a, \\ t \in (0; \pi) \end{cases}$ откуда $t \in (0; \operatorname{arctg} a) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

4. Пусть α — меньший острый угол (рис. 133). Тогда $a = b \operatorname{tg} \alpha$ — меньший катет, $c = \frac{b}{\cos \alpha}$ — гипотенуза. Тогда b — средний член прогрессии $b = \frac{a+c}{2}$, значит,

$$b = \frac{b \operatorname{tg} \alpha + \frac{b}{\cos \alpha}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha + 2 = \frac{1}{\cos \alpha} \Leftrightarrow (\operatorname{tg} \alpha - 2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} \alpha - 2)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 \Leftrightarrow -4 \operatorname{tg} \alpha + 4 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

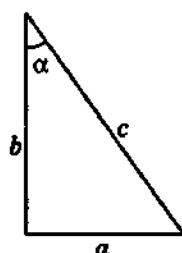


Рис. 133

Вариант 2

1. а) Решения удовлетворяют следующей совокупности

$$\begin{cases} \cos \pi \sqrt{x-4} = -1, \\ \cos \pi \sqrt{x} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4} = 1+2k, \\ \sqrt{x} = 2n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4} = 2m, \\ \sqrt{x} = 1+2l, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}, \quad m, l \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + (1 + 2k)^2, \\ x = 4n^2, \\ x = 4 + 4m^2, \\ x = (1 + 2l)^2, \end{cases} \quad k, m, n, l \geq 0, \quad k, m, n, l \in \mathbb{Z}.$$

Для существования решений необходимы условия:

$$\begin{cases} 4n^2 = 5 + 4k + 4k^2, \\ 4 + 4m^2 = 1 + 4l + 4l^2, \end{cases}$$

для каких-то целых k, m, n, l . Нетрудно заметить, что в равенства входят четные и нечетные числа. Так как всего одно нечетное число в каждом равенстве, эти неравенства не выполняются ни при каких целых k, m, n, l . Уравнение не имеет решений.

б) Аналогично вар. 1 получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \sin^2 x = -\sin^3 x, \\ \cos^2 x = -\cos^3 x, \end{cases}$$

которая имеет следующие решения:

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Уравнение имеет решения. Из квадратного уравнения получаем $\cos y = 4 - a^2$, $\cos y = -1$. Одно решение не зависит от a и определяется из $\cos y = -1$, $y = \pi$. Ясно, что второе решение может быть только при условии $-1 \leq 4 - a^2 \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq a^2 \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq |a| \leq \sqrt{5}$.

Уравнение $\cos y = 4 - a^2$ решим, используя тригонометрический круг (рис. 134). По условию $y \in [-\frac{\pi}{3}; 1,5\pi]$. Надо определить такие a , чтобы уравнение $\cos y = 4 - a^2$ имело ровно один корень в проме-

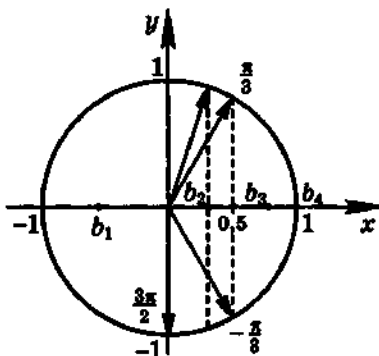


Рис. 134

жутке $y \in [-\frac{\pi}{3}; 1,5\pi]$. Если обозначить $b = 4 - a^2$, на рисунке подходящее b — это b_2 , а в случае b_1 и b_3 уравнение имеет два корня. $b_2 \in (0; \cos(-\frac{\pi}{3}))$, то есть $b_2 \in (0; 0,5)$.

Откуда

$$\begin{aligned} 0 < 4 - a^2 < 0,5 &\Leftrightarrow 3,5 < a^2 < 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3,5} < |a| < 2. \end{aligned}$$

Кроме рассмотренных случаев есть еще $b_4 = 1$, когда уравнение имеет

один корень. $b_4 = 4 - a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 3, a = \pm\sqrt{3}$. При этом корень $y=0$.

Итак, условию удовлетворяет $\begin{cases} a = \pm\sqrt{3}, \\ \sqrt{3,5} < |a| < 2. \end{cases}$

3. а) Исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin z - \cos z \geq 0, \\ \cos z - 0,5 < 0, \\ \sin z - \cos z \geq (\cos z - 0,5)^2, \\ \cos z - 0,5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin z (1 - \operatorname{ctg} z) \geq 0, \\ \cos z < 0,5, \\ \sin z = 0, \\ \cos z \leq 0, \\ \sin z \geq \cos^2 z + 0,25, \\ \cos z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \operatorname{ctg} z \geq 0, \\ \cos z < 0,5, \\ z = \pi, \\ \sin^2 z + \sin z - 1,25 \geq 0, \\ \cos z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} z \leq 1, \\ \cos z < 0,5, \\ z = \pi, \\ (\sin z + \frac{\sqrt{6}+1}{2})(\sin z - \frac{\sqrt{6}-1}{2}) \geq 0, \\ \cos z \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} < z \leq \pi, \\ z = \pi, \\ 0 \leq z \leq \frac{\pi}{3}, \\ z \geq \arcsin \frac{\sqrt{6}-1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для того чтобы записать окончательное решение, сравним $\frac{\pi}{3}$ и $\arcsin \frac{\sqrt{6}-1}{2}$. Так как $\frac{\pi}{3} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$, то сравним $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$. $\frac{\sqrt{6}-1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $\sqrt{6}-1 < \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{6} < 1 + \sqrt{3}$. Так как $\sqrt{3} > 1,7$ и $\sqrt{6} < \sqrt{6,25} = 2,5$, то $\sqrt{6} < 1 + \sqrt{3}$, откуда следует, что $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{6}-1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} > \arcsin \frac{\sqrt{6}-1}{2}$. Итак, решение $z \in [\arcsin \frac{\sqrt{6}-1}{2}; \pi]$.

б) Неравенство равносильно неравенству $a \cos t + \sin t > \frac{1}{\sin t}$, тогда

$$\frac{a \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t - 1}{\sin t} > 0 \Leftrightarrow \frac{a \cos t \cdot \sin t - \cos^2 t}{\sin t} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sin t \cdot \cos t}{\sin t} (a - \operatorname{ctg} t) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos t (a - \operatorname{ctg} t) > 0,$$

так как $\cos t \geq 0$ для $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то $a - \operatorname{ctg} t > 0$. Если $a=0$, то решение $t \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$. Если $a > 0$, то решение $t \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (\operatorname{arccotg} a; \frac{\pi}{2})$.

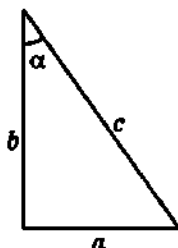


Рис. 135

4. Пусть α — меньший угол, $a = b \operatorname{tg} \alpha$, $c = \frac{b}{\cos \alpha}$ (рис. 135). Так как b средний член геометрической прогрессии, то

$$b^2 = a \cdot c, \quad b^2 = b \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{b}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ откуда } \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Тема 7

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

Задание 7.1. Теорема сложения

Вариант 1

1. Функцию можно преобразовать следующим образом:

$$y = \frac{\sin(x-\pi) \cos(1,5\pi + 0,5x) - \sin(1,5\pi + 0,5x) \sin(1,5\pi - x)}{\sin(1,5\pi + 0,5x)}.$$

Используя формулу приведения, получим $y = \frac{\cos 0,5x \cos x + \sin 0,5x \sin x}{\cos 0,5x}$

или, что то же самое, $y = \frac{\cos 0,5x}{\cos 0,5x}$, то есть $y = 1$. Тогда производная в точке $\frac{\pi}{4}$ равна нулю: $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$.

2. Применяя формулы сложения для тангенса, получим для исходного выражения

$$\frac{(\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{tg} x)(\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg} x)}{(1 - \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}})(1 + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}})} - \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3}} - \frac{1}{3} = -\frac{8 \operatorname{tg}^2 x}{3x^2(3 - \operatorname{tg}^2 x)}.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \operatorname{tg}^2 x}{3x^2(3 - \operatorname{tg}^2 x)} = -\frac{8}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{\cos^2 x(3 - \operatorname{tg}^2 x)} = -\frac{8}{9}.$

3. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2y \cos ay - \cos(a+2)y = 0, \\ \sin ay \neq 0. \end{cases}$

Применяя формулу для $\cos(a+2)y$, получим

$$\cos 2y \cdot \cos ay - \cos ay \cdot \cos 2y + \sin ay \cdot \sin 2y = 0,$$

откуда $\begin{cases} \sin ay \cdot \sin 2y = 0, \\ \sin ay \neq 0. \end{cases}$

Решения $\begin{cases} 2y = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ ay \neq \pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Решение существует при любом a , не яв-

ляющемся четным числом. $y = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

4. $\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$. Докажем, что при любом $|a| \leq 1$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Записав $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a$, убедимся, что области значений левой и правой частей совпадают. Действительно, при $0 \leq a \leq 1$ $0 \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos a \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \frac{\pi}{2} - \arccos a \leq \frac{\pi}{2}$; при $-1 \leq a < 0$ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq 0$, $\frac{\pi}{2} < \arccos a \leq \pi$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos a < 0$. При значениях угла $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ равенства $\arcsin a = \alpha$ и $\sin \alpha = a$ равносильны.

Поэтому, вычисляя синус обеих частей исходного равенства, имеем ему равносильное $\sin(\arcsin a) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arccos a)$, откуда $a = a$. Последнее равенство верно, поэтому верно и равносильное ему исходное равенство.

$$\begin{aligned} 5. \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta - \alpha) = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + (-\sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)}) \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 - 8\sqrt{6}}{25}. \end{aligned}$$

Вариант 2

1. Применяя формулы приведения, функцию можно записать в виде $y = \frac{\sin x \cos 0,5x - \cos x \sin 0,5x}{\sin 0,5x}$, откуда $y = \frac{\sin 0,5x}{\sin 0,5x}$, $y = 1$. Значит $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$.

2. Нетрудно преобразовать исходное выражение

$$\frac{8 - \frac{(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x)(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)}{(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x)(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x)}}{x^2} = \frac{8 - \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}}{x^2} = -\frac{8 \operatorname{tg}^2 x}{x^2(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)}.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \operatorname{tg}^2 x}{x^2(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)} = -8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{\cos^2 x(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)} = 8.$$

3. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos ay \cos y - \sin ay \sin y - \cos y \cos ay = 0, \\ \sin ay \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{откуда имеем } \begin{cases} \sin ay \cdot \sin y = 0, \\ \sin ay \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ ay \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если $a = 0$, то решений нет. Если a — целое ($a \neq 0$), то $y \neq \frac{\pi l}{a}$, среди $y = \frac{\pi l}{a}$ есть все решения вида $y = \pi k$, значит, при целом a уравнение не имеет решений. Уравнение имеет решения $y = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ при любых нецелых вещественных значениях параметра a .

4. $\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$. См. решение вар. 1.

$$\begin{aligned} 5. \sin \beta &= \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{3}{5}(\pm \sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)}) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \pm \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{-4 \pm 6\sqrt{6}}{25}. \end{aligned}$$

$$\text{Подходит знак } \leftarrow, \text{ поэтому } \sin \beta = \frac{-4 - 6\sqrt{6}}{25}.$$

Задание 7.2. Формулы кратных углов

Вариант 1

1. Используя формулы приведения, выражение запишем в виде $\cos^3 \alpha \cos 3\alpha + \sin^3 \alpha \sin 3\alpha$. Из формул для $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ имеем $\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4}$, $\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$, подставив в выражение, получим $\frac{\cos^2 3\alpha + 3 \cos \alpha \cos 3\alpha}{4} + \frac{3 \sin \alpha \sin 3\alpha - \sin^2 3\alpha}{4} = \frac{1}{4}(\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha) + \frac{3}{4}(\cos \alpha \cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha) = \frac{1}{4} \cos 6\alpha + \frac{3}{4} \cos 2\alpha = \frac{1}{4}(4 \cos^2 2\alpha - 3 \cos 2\alpha) + \frac{3}{4} \cos 2\alpha = \cos^2 2\alpha$.

$$\begin{aligned} 2. \int f(x) dx &= \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} dx = \\ &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx = \int |\cos x - \sin x| dx = \int \sqrt{2} |\sin(x - \frac{\pi}{4})| dx = \\ &= \sqrt{2} \int (-\sin(x - \frac{\pi}{4})) dx = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) + C. \end{aligned}$$

Так как $F(0) = 0$, то $C = -1$. Первообразная $F(x) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1 = \cos x + \sin x - 1$.

3. Область значений функции $\operatorname{tg} y$ промежуток $(-\infty; +\infty)$. Функция $\arcsin(\operatorname{tg} y)$ определена при $-1 \leq \operatorname{tg} y \leq 1$ с областью значений $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, тогда область значений $2 \arcsin(\operatorname{tg} y)$ есть $[-\pi; \pi]$. Значит, наибольшее и наименьшее значения исходной функции равны 1 и -1.

4. Уравнение преобразуем к виду $(2 \sin^2 0,5z - 1)^2 = |a - \cos^2 z|$, что равно-

сильно $\cos^2 z = |a - \cos^2 z|$, откуда имеем $\begin{cases} a - \cos^2 z = \cos^2 z, \\ a - \cos^2 z = -\cos^2 z, \end{cases}$ то есть

$\begin{cases} \cos^2 z = \frac{a}{2}, \\ a = 0. \end{cases}$ Если $a = 0$, то решение z — любое число. Если $0 < \frac{a}{2} \leq 1$

или $0 < a \leq 2$, то $\cos z = \pm \sqrt{\frac{a}{2}}$. Это уравнение имеет решение

$z = \pm \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{a}{2}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Если $a > 2$ или $a < 0$, решений нет.

5. Пусть $\operatorname{tg} 5^\circ$ — рациональное число. Рассмотрим $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}$ — число иррациональное. $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(5^\circ + 10^\circ) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 5^\circ} + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \frac{2 \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}} = \end{aligned}$$

выраженный через $\operatorname{tg} 5^\circ$, т. е. число рациональное. Пришли к противоречию. Значит, $\operatorname{tg} 5^\circ$ — число иррациональное.

Вариант 2

1. Упрощаем аналогично вар. 1, используя формулы приведения и формулы тройного угла для синуса и косинуса. Получим, что исходное выражение равно $-\cos^3 2\alpha$.
2.
$$\int f(x) dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int |\sin x - \cos x| dx =$$
$$= \sqrt{2} \int \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| dx = \sqrt{2} \int \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$
Так как $F(\pi) = 0$, то $C = -1$. Тогда $F(x) = -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -\cos x - \sin x - 1$.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции равны -1 и 1 (см. вар. 1).
4. Уравнение можно записать в виде $(2\cos^2 0,5z - 1)^2 = |\cos^2 z - a|$, откуда имеем $\cos^2 z = |a - \cos^2 z|$. Уравнение свелось к уравнению первого варианта. Решение то же.
5. Как показано в вар. 1, $\operatorname{tg} 15^\circ$ — число иррациональное. Рассмотрим $\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 7,5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 7,5^\circ}$. Если бы число $\operatorname{tg} 7,5^\circ$ было рациональным, число $\operatorname{tg} 15^\circ$ тоже было бы рациональным, но это не так. Поэтому $\operatorname{tg} 7,5^\circ$ — число иррациональное.

Задание 7.3. Формулы половинных углов

Вариант 1

1. Используя формулы $\cos x + \cos 3x = 2\cos x \cdot \cos 2x$, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, приведем неравенство к виду

$$\frac{2\cos^2 x + 2\cos x \cdot \cos 2x}{2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x \cdot \cos 2x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\cos x (\cos x + \cos 2x)}{\sin x (\cos x + \cos 2x)} < 1,$$

далее получаем

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x < 1, \\ \cos x + \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Решение, удовлетворяющее условию задачи, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \pi)$.

2. График заданной функции $y = \sin(0,5 \operatorname{arctg} x)$ (рис. 136). Область значений функции $z = \operatorname{arctg} x$ есть промежуток $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, поэтому функция $\sin(0,5z)$ определена на промежутке $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Область ее значений $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Исходная функция определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$, область значений $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Так как функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастающая и функция $y = \sin z$ возрастает на промежутке

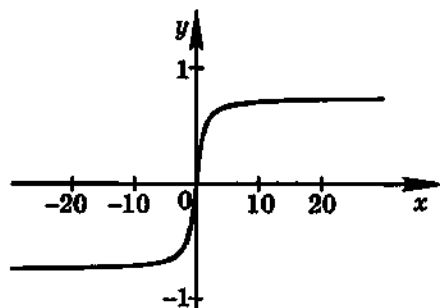


Рис. 136

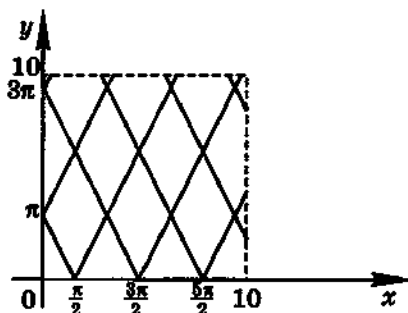


Рис. 137

$(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$, то исходная функция возрастает при любом значении аргумента. Функция нечетная. Используя перечисленные свойства функции, можно построить ее график.

3. Используя формулы $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 0,5y = \frac{1 + \cos y}{2}$, уравнение можно преобразовать к виду $\cos 2x + \cos y = 0$. Далее применяем формулу суммы косинусов и получим $2 \cos(\frac{y+2x}{2}) \cos(\frac{y-2x}{2}) = 0$. Нетрудно

решить это уравнение: $\begin{cases} \frac{y+2x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{y-2x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ откуда имеем мно-

жество $\begin{cases} y = -2x + \pi + 2\pi k, \\ y = 2x + \pi + 2\pi l \end{cases}$ (рис. 137).

В квадрат $x \in [0; 10]$, $y \in [0; 10]$ попадают отрезки прямых $y = 2x + \pi$, $y = 2x + 3\pi$, $y = 2x - \pi$, $y = 2x - 3\pi$, $y = 2x - 4\pi$, $y = -2x + \pi$, $y = -2x + 3\pi$, $y = -2x + 5\pi$, $y = -2x + 7\pi$, $y = -2x + 9\pi$.

4. Применяя формулы приведения, имеем уравнение $\cos 2t + \sin 2t = |\operatorname{tg} t|$,

которое можно преобразовать, используя формулы для синуса и косинуса через тангенс половинного угла

$$\frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = |\operatorname{tg} t| \Leftrightarrow \frac{1 + 2 \operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = |\operatorname{tg} t|.$$

При $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ значения $\operatorname{tg} t \in (-\infty; +\infty)$. Поэтому уравнение можно рассмотреть как уравнение относительно $z = \operatorname{tg} t$:

$$\frac{1 + 2z - z^2}{1 + z^2} = |z|, \quad z^2 |z| + z^2 - 2z + |z| - 1 = 0,$$

при $z \geq 0$ уравнение принимает вид $z^3 + z^2 - z - 1 = 0$, равносильно $(z-1)^2(z+1) = 0$. Оно имеет один положительный корень. При $z < 0$ уравнение сводится к $z^3 - z^2 + 3z + 1 = 0$. Функция $z^3 - z^2 + 3z + 1$ возрастающая, в этом можно убедиться исследованием производной

$3z^2 - 2z + 3$, которая при любом z положительна. При $z = -1$ левая часть последнего уравнения равна -4 , при $z = 0$ равна 1 , поэтому это уравнение имеет ровно один отрицательный корень. Значит, исходное уравнение имеет всего два корня.

5. Преобразуем $2 + \cos x = 3 \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} (3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})$. Тогда

$$\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} (3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}.$$

Сделав замену переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $dt = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$, интеграл запишем

$$\text{так: } 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Вариант 2

1. Используя формулы $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, $\sin 3x - \sin x = 2 \sin x \cdot \cos 2x$, приведем неравенство к виду

$$\frac{\sin^2 x + \sin x \cdot \cos 2x}{\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \cos 2x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x (\sin x + \cos 2x)}{\cos x (\sin x + \cos 2x)} < 1,$$

откуда имеем $\begin{cases} \operatorname{tg} x < 1, \\ \sin x + \cos 2x \neq 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получим

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Функция $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2}$ убывает при всех $x \in \mathbb{R}$, область значений $y \in (0; \frac{\pi}{2})$.

На промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ функция $\cos y$ убывает. Поэтому исходная функция возрастает при всех $x \in \mathbb{R}$. Область значений $(0; 1)$ (рис. 138).

3. Эту задачу можно решить аналогично вар. 1. Но заметим, что если в вар. 1 поменять местами x и y , можно получить задачу вар. 2. Поэтому множество выглядит так, как на рис. 139.

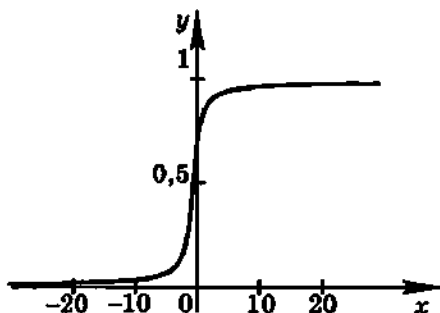


Рис. 138

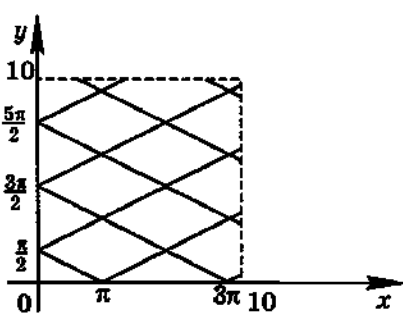


Рис. 139

4. Уравнение сводится к виду $\cos 2t - \sin 2t = |\operatorname{tg} t|$. Если заменить t на $-t$, получим уравнение вар. 1. Поэтому рассматриваемое уравнение имеет два корня на $[-0,5\pi; 0,5\pi]$.
5. Интеграл вычисляется аналогично вар. 1.

$$\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2} (2 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задание 7.4. Формулы понижения степени

Вариант 1

1. $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$. Эта функция периодическая с периодом $\frac{\pi}{2}$. Нули этой функции $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Расстояние между соседними нулями равно $\frac{\pi}{2}$, то есть периоду, поэтому искомая площадь фигуры одна и та же для всех промежутков между нулями и равна

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

2. $y(x) = \sin(x+1) \cdot \sin(x-1) = \frac{1}{2}(\cos 2 - \cos 2x)$. Если $x = \pm 1$, то $y(x) = 0$. Область значений $y(x)$ отрезок $[\frac{1}{2}(\cos 2 - 1); \frac{1}{2}(\cos 2 + 1)]$, то есть $|y(x)| < 1$. Рассмотрим $|x| \geq 1$, для этих x ординаты точек на прямой $y = x$ по модулю не меньше 1. Т. е. не может быть таких корней, что $|x| \geq 1$. Если $|x| < 1$, то ординаты удовлетворяют неравенству $-1 < y(x) < 0$. Графики исходной функции и прямой могут пересекаться только при таких x , что $y(x) < 0$, $y = x < 0$. При $x \in (-1; 0)$ функция $y(x)$ убывает, а функция $y = x$ возрастает и $y(-1) = 0$, $y(0) < 0$. При $x = -1$ ордината точки на прямой $y = x$ равна -1 , при $x = 0$ $y = 0$. Графики пересекаются в единственной точке с абсциссой $x \in (-1; 0)$ (рис. 140).

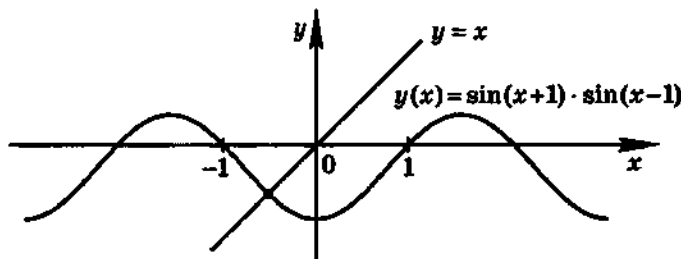


Рис. 140

3. Преобразуем числитель и знаменатель:

$$\begin{aligned} \cos 3z \cos 4z + \sin 2z \sin 5z &= \frac{1}{2}(\cos 7z + \cos z - \cos 7z + \cos 3z) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos z + \cos 3z) = \cos z \cos 2z, \quad \cos 2z + \cos 4z = 2 \cos z \cos 3z. \end{aligned}$$

Тогда уравнение примет вид $\frac{\cos z \cos 2z}{\cos z \cos 3z} = 0$, или $\begin{cases} \cos z \neq 0, \cos 3z \neq 0, \\ \cos 2z = 0. \end{cases}$

Решение: $z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

4. $\int_0^{\pi} \sin^3 2x \cos^2 3x dx = \int_0^{\pi} \sin 2x \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right) dx$. Сделаем замену переменной $t = x - \frac{\pi}{2}$, тогда интеграл примет вид

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t + \pi) \frac{(1 - \cos(4t + 2\pi))}{2} \frac{(1 + \cos(6t + 3\pi))}{2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin 2t) \frac{(1 - \cos 4t)}{2} \frac{(1 - \cos 6t)}{2} dt = 0.$$

Интеграл на симметричном промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ от нечетной функции равен нулю.

5. Используя формулы приведения, исходное выражение можно записать так:

$$-\cos 5^\circ \sin 35^\circ \sin 25^\circ = \frac{1}{2} \cos 5^\circ (\cos 60^\circ - \cos 10^\circ) = \frac{1}{4} \cos 5^\circ - \frac{1}{2} \cos 5^\circ \cos 10^\circ = \\ = \frac{1}{4} \cos 5^\circ - \frac{1}{4} \cos 5^\circ - \frac{1}{4} \cos 15^\circ = -\frac{1}{4} \cos 15^\circ.$$

$\cos 15^\circ$ вычислим из косинуса двойного угла $\cos 30^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1$, $\cos^2 15^\circ = \frac{\cos 30^\circ + 1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$. Поэтому значение исходного выражения равно $-\frac{1}{8} \sqrt{3 + 2}$.

Вариант 2

1. Задача решается аналогично вар. 1. Искомая площадь равна

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 4x dx = \frac{\pi}{4}.$$

2. Графики пересекаются один раз. См. решение вар. 1 и графическую иллюстрацию (рис. 141).

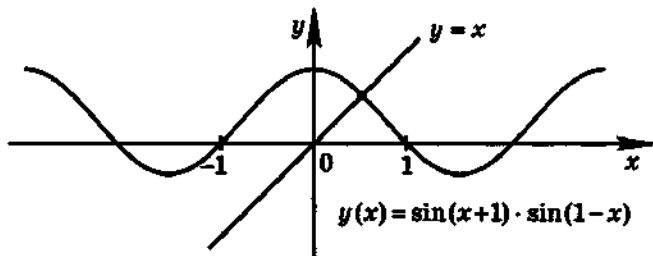


Рис. 141

3. Уравнение можно переписать в виде $\frac{-\cos 7z + \cos z + \cos 7z + \cos 3z}{\sin 3z \cos z} = 0$, от-

куда получим $\frac{\cos z \cos 2z}{\cos z \sin 3z} = 0$, или $\begin{cases} \cos 2z = 0, \\ \sin 3z \neq 0, \\ \cos z \neq 0. \end{cases}$

Решение имеет вид $z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

4. Решение аналогично вар. 1. Искомый интеграл равен нулю.

5. Используя формулы приведения, запишем выражение так:
 $-\cos 5^\circ(-\sin 35^\circ)(-\sin 25^\circ)$.

Его значение равно вычисленному в вар. 1 $-\frac{1}{8}\sqrt{3+2}$.

Задание 7.5. Формулы повышения степени

Вариант 1

1. Преобразуем числитель и знаменатель:

$$\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x) = \frac{\sin(a+x)\cos(a-x) - \sin(a-x)\cos(a+x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)} = \frac{2\sin x \cos a}{\cos(a+x)\cos(a-x)},$$

$$\sin(a+x) - \sin(a-x) = 2\sin x \cos a.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x \cos a}{2\sin x \cos a \cos(a+x)\cos(a-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos a \cos(a+x)\cos(a-x)} = \frac{1}{\cos^3 a}.$$

2. Преобразованиями получим равносильное уравнение. Для этого заменим $\cos 10y - \cos 6y = -2\sin 8y \cdot \sin 2y$, $1 - \cos 8y = 2\sin^2 4y$. Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} 2\sin^2 4y - 2\sin 8y \cdot \sin 2y &= 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 4y - 4\sin 4y \cdot \cos 4y \cdot \sin 2y = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin 4y(2\sin 2y \cdot \cos 2y - 2\sin 2y \cdot \cos 4y) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\sin 4y \cdot \sin 2y \cdot 2\sin 3y \cdot \sin y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4y = 0, \\ \sin 3y = 0, \\ \sin y = 0, \\ \sin 2y = 0, \end{cases} \text{ откуда получим} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi k}{3}, & k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi k_1}{4}, & k_1 \in \mathbb{Z}, \\ y = \pi k_2, & k_2 \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi k_3}{2}, & k_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \text{ Итак, решение } y = \frac{\pi k}{3}, y = \frac{\pi k_1}{4}, k, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

3. Используя формулы для сумм синусов и косинусов, преобразуем исходное выражение:

$$\frac{\sin 1 + \sin 4 + \sin 5}{\cos 2 + \cos 3} = \frac{2\sin 2 \cdot \cos 2 + 2\sin 3 \cdot \cos 2}{2\cos \frac{5}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}} = \cos 2 \frac{\sin 2 + \sin 3}{\cos \frac{5}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}} = \cos 2 \frac{\sin \frac{3}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}}{\cos \frac{5}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}} =$$

$= \cos 2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$; так как $\cos 2 < 0$ и $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} < 0$, то выражение больше нуля.

4. Исходное выражение можно преобразовать:

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(180^\circ - \alpha - \beta) - 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \\ & = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) - 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \\ & = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} - 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \\ & = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) = \\ & = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

5. Исходную систему уравнений приведем к равносильным системам:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x+y=a, \\ \cos^2 y - \cos^2 x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a, \\ (\cos y - \cos x)(\cos y + \cos x) = a \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a, \\ 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a, \\ \sin(x-y) \sin(x+y) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a, \\ \sin(x-y) \sin a = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $a=0$, то система примет вид $\begin{cases} x+y=a, \\ \sin(x-y) \cdot 0 = 0, \end{cases}$ она имеет решения $x = -y = t \in \mathbb{R}$.

Если $a \neq 0$, то $\begin{cases} x+y=a, \\ \sin(x-y) = \frac{a}{\sin a}, \end{cases}$ но так как при любом a $|\sin a| < |a|$, то $|\frac{a}{\sin a}| > 1$ и уравнение решений не имеет.

Вариант 2

1. Предел вычисляется аналогично вар. 1 и равен $-\frac{1}{\cos^2 a \sin a}$.
2. Применяя формулы $\sin 10y + \sin 6y = 2 \sin 8y \cdot \cos 2y$, $1 - \cos 8y = 2 \sin^2 4y$, уравнение приведем к виду $\sin 8y \cdot \cos 2y + \sin^2 4y = 0$. Применяя формулу для синуса двойного угла, разложим на множители:

$$\sin 4y (2 \cos 4y \cdot \cos 2y + \sin 4y) = 0, \quad 2 \sin 4y \cdot \cos 2y (\cos 4y + \sin 2y) = 0,$$

последнее уравнение преобразуется в уравнение

$$\sin 4y \cdot \cos 2y (\cos 4y + \cos(\frac{\pi}{2} - 2y)) = 0,$$

откуда получим $\sin 4y \cdot \cos 2y \cdot \cos(y + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(3y - \frac{\pi}{4}) = 0$.

Решение имеет вид: $y = \frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z}$; $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_1}{3}, k_1 \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{\sin 2 + \sin 3 + \sin 5}{\sin 4 - \sin 1} = \frac{\sin 2 + 2 \sin 4 \cdot \cos 1}{2 \sin \frac{3}{2} \cdot \cos \frac{5}{2}} = \frac{2 \cos 1 (\sin 1 + \sin 4)}{2 \sin \frac{3}{2} \cdot \cos \frac{5}{2}} = \frac{2 \cos 1 \cdot \sin \frac{5}{2} \cdot \cos \frac{3}{2}}{2 \sin \frac{3}{2} \cdot \cos \frac{5}{2}} =$
 $= \cos 1 \cdot \operatorname{tg} \frac{5}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{3}{2}$ так как $\cos 1 > 0$, $\operatorname{ctg} \frac{3}{2} > 0$, $\operatorname{tg} \frac{5}{2} < 0$, то значение исходного выражения меньше нуля.

4. Значение выражения равно нулю. См. решение вар. 1.

5. Систему можно преобразовать в равносильную систему

$$\begin{cases} x - y = a, \\ \sin(x - y) \sin(x + y) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a, \\ \sin a \sin(x + y) = a. \end{cases}$$

Если $a = 0$, то решение $x = y = t \in \mathbb{R}$. Если $a \neq 0$, то $\sin(x + y) = \frac{a}{\sin a}$, так как $|\frac{a}{\sin a}| > 1$, то система в этом случае решений не имеет.

Задание 7.6. Контрольное задание

Вариант 1

1. $f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. График этой функции приведен на рис. 142.

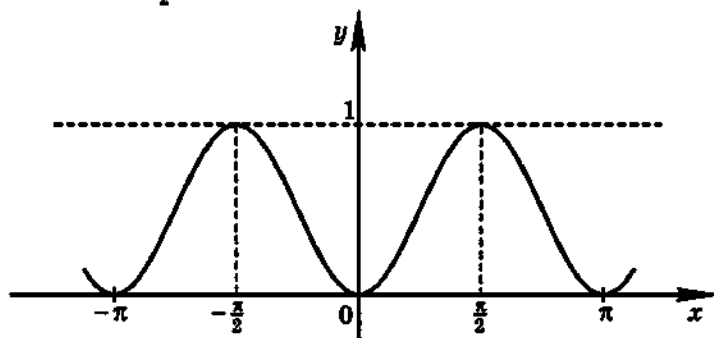


Рис. 142

2. Как известно, в точках перегиба у функции, имеющей непрерывную вторую производную, вторая производная равна нулю. Найдем точки перегиба из уравнения $f''(x) = 2 \cos 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$,

$k \in \mathbb{Z}$. Искомая площадь равна $S = \left| \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}}^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(k+1)}{2}} f(x) dx \right|$. Вычислим интеграл

$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. Тогда

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k+1)$$

$$\int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}}^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k+1)} f(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} (\sin(\frac{\pi}{2} + \pi(k+1)) - \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k)) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k).$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

Площадь будет равна $S_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ или $S_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Искомая большая площадь $S_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

3. Для имеющей производную функции тангенс угла наклона касательной равен производной. Для симметричных касательных тангенсы углов наклона имеют противоположные значения. Если эти касательные проведены в точках x_1 и x_2 , то $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\operatorname{tg} \alpha_2$ и соответственно $f'(x_1) = -f'(x_2)$, причем $\frac{\pi}{4} - x_1 = x_2 - \frac{\pi}{4}$. Вычислим $f'(x)$. $f'(x) = \sin 2x$, наибольшее значение $f'(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$ и наименьшее значение $f'(x)$ в точке $x = \frac{3\pi}{4}$, эти точки симметричны относительно точки $x = \frac{\pi}{2}$. Тангенсы угла наклона в этих точках $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$. Угол между касательными в точках $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$ равен $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Это наибольшее значение угла между симметричными касательными на промежутке $x \in [0; \pi]$. Наименьшее значение угла равно нулю. Поэтому угол между касательными меняется от нуля до $\frac{\pi}{2}$.
4. Например, угол наклона касательной к оси x в точке $\frac{\pi}{4}$ есть $\frac{\pi}{4}$, а в точке $-\frac{\pi}{4}$ есть $-\frac{\pi}{4}$. Угол между этими касательными равен $\frac{\pi}{2}$, то есть прямой.

Вариант 2

1. $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. График этой функции приведен на рис. 143.

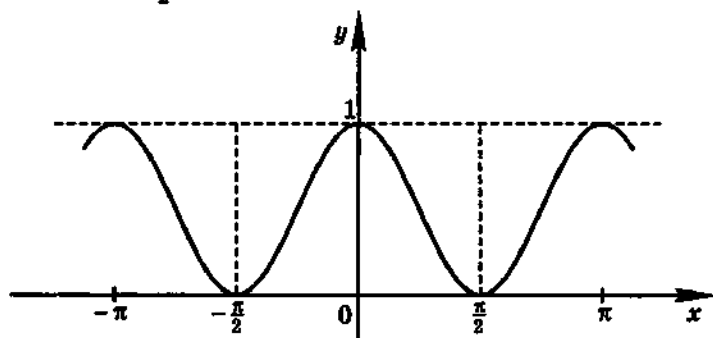


Рис. 143

2. Точки перегиба те же, что и для функции вар. 1. Большая площадь равна $S = 0,5 + 0,25\pi$.

3. Угол меняется от 0 до 0,5л. См. вар. 1.

4. Например, угол между касательными в точках $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$.

Задание 7.7. Контрольное задание

Вариант 1

1. Неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2}|\sin(2x + \frac{\pi}{4})| < 1$, возводя обе части неравенства в квадрат, получаем равносильное

$$\sin^2(2x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} < 0, \quad \left(\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0,$$

решения которого
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Окончательно решение может быть записано как

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. а) $f(x) = \cos x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$. Первообразная

$$F(x) = \frac{1}{2} \int (\cos 3x + \cos x) dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} \sin 3x + \sin x) + C.$$

Так как $F(0) = 0$, $C = 0$.

б) График этой функции приведен на рис. 144.

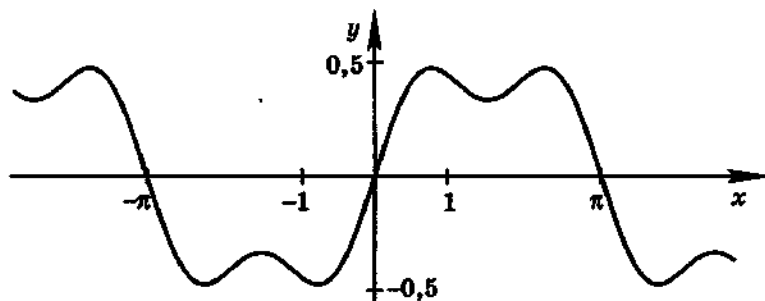
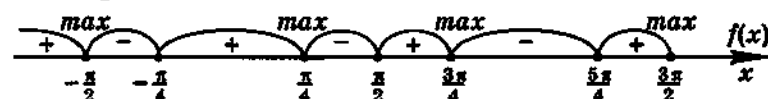


Рис. 144

в) Найдем экстремальные точки: $F'(x) = f(x) = \cos x \cos 2x = 0$. Это

точки
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}, \quad l \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{или}$$



Функция $f(x)$ имеет период 2π . Поэтому достаточно рассмотреть отрезок длиной 2π . Например, отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. Ближайшие точки максимума $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$. Искомая площадь равна

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} F(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{6} \sin 3x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{18} \cos 3x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{2} \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{4}{9} \sqrt{2}.$$

3. Выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} = \\ &= (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} (\alpha + \gamma)}\right) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma}\right) = 0. \end{aligned}$$

4. Так как $x \geq 1$, то $\frac{\pi}{4} \leq \arctg x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ и $0 < \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда значение исходного выражения не меньше $\frac{\pi}{2}$ и не больше $\frac{3\pi}{2}$.

Вычислим производную

$$\begin{aligned} \left(2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' &= \frac{2}{1+x^2} + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2}{1+x^2} + \\ &+ \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

Значит, при $x \geq 1$ функция постоянна. Ее значение можно определить, например, подставив $x=1$. $2 \arctg 1 + \arcsin 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

5. Рассмотрим, какие силы действуют на тело (рис. 145). Это сила тяжести, равная mg , где g — ускорение свободного падения, $F_{тр}$ — сила трения, N — реакция опоры. Из физики известно, что $F_{тр} = 0,2N$. Чтобы тело двигалось по наклонной плоскости, суммарная сила, действующая по направлению перпендикуляра, должна быть равна нулю:

$$N - mg \cdot \cos 30^\circ + F \sin \alpha = 0.$$

Вдоль плоскости приложены силы: $F_{тр}$ — трения, $F \cos \alpha$ — проекция силы F и проекция силы тяжести $mg \cdot \cos 60^\circ$. Проекция силы F должна быть не меньше суммы силы трения и проекции силы тяжести. Так как надо определить наименьшую силу, приравняем их $F \cos \alpha = F_{тр} + mg \cdot \cos 60^\circ$.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} F \cos \alpha = 0,2N + \frac{mg}{2}, \\ F \sin \alpha = mg \frac{\sqrt{3}}{2} - N, \end{cases} \quad \text{откуда получим } F = \frac{\sqrt{3} \cdot 0,2 + 1}{2(\cos \alpha + 0,2 \sin \alpha)}.$$

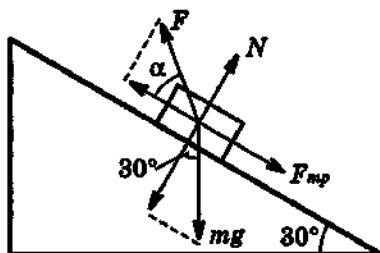


Рис. 145

Сила будет наименьшей, если $\cos\alpha + 0,2 \sin\alpha$ принимает наибольшее значение. Так как $0,2 \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1^2 + 0,2^2} \cos(\alpha - \varphi)$, где $\varphi = \arctg 0,2$, то наибольшее значение косинуса при $\alpha - \varphi = 0$, то есть $\alpha = \varphi = \arctg 0,2$.

Вариант 2

1. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2} |\sin(0,25x + \frac{\pi}{4})| > 1 \Leftrightarrow |\sin(0,25(x + \pi))| > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi k < 0,25(x + \pi) < \frac{3}{4}\pi + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow 4\pi k < x < 2\pi + 4\pi k.$$

2. а) $F(x) = \int \sin x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 3x) dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{6} \sin 3x + C.$

Так как $F(0) = 0, C = 0.$

- б) График $F(x)$ приведен на рис. 146.

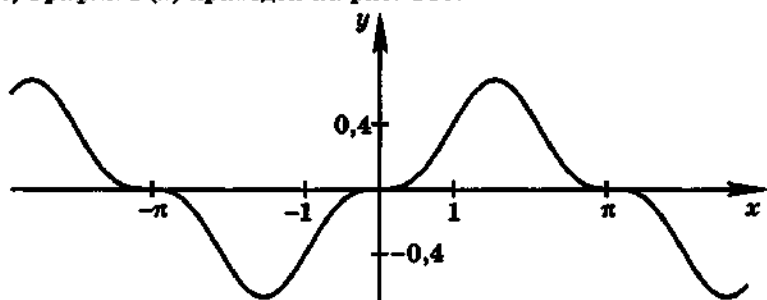
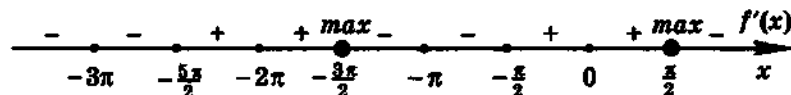


Рис. 146

- в) $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} k, k \in Z$ — точки экстремума.



Например, ближайшие точки максимума $x_1 = -\frac{3\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2}$. Площадь под графиком равна

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{6} \sin 3x) dx = 4 \left(-\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{18} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{18} \right) = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}.$$

3. $-\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma =$
 $= -\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) =$
 $= -\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta) =$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1) - (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = \\
 &= (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \left[\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} - 1 \right] = \\
 &= (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) [\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) - 1] = (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) [1 - 1] = 0.
 \end{aligned}$$

4. Функция $\operatorname{arctg} x$ возрастающая; так как $\left(\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} \right)' = -\frac{2}{1+x^2} < 0$, то функция $\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$ убывает. Область значений функции $2 \operatorname{arctg} x$ для $x \leq -1$ есть $(-\pi; -\frac{\pi}{2}]$. Область значений $\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$ есть $[-\frac{\pi}{2}; 0)$.

Значения исходной функции для $x \leq -1$ принадлежат промежутку $(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2})$. Вычислим производную исходного выражения:

$$\begin{aligned}
 (2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2})' &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} = \frac{2}{1+x^2} + \\
 &+ 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2 \sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0. \text{ Итак, для } x \leq -1 \text{ производная}
 \end{aligned}$$

функции $2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$ равна нулю, то есть для $x \leq -1$ значение исходного выражения постоянно. Подставим $x = -1$ и вычислим: $2 \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcsin}(-1) = -\pi$. Значит, значения исходного выражения при $x \leq -1$ равно $-\pi$.

5. См. решение вар. 1. Угол равен $\operatorname{arctg} 0,2$, и этот угол не зависит от угла наклона плоскости.

Тема 8

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Задание 8.1. Свойства обратных тригонометрических функций. Производная этих функций

Вариант 1

1. $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsin}(-x) \leq \frac{\pi}{2}$, $(\operatorname{arcsin}(-x))^2 \leq \frac{\pi^2}{4} < 3$, $0 \leq \operatorname{arccos} x \leq \pi$, $(\operatorname{arccos} x)^3 \leq (3,2)^3 = 32,768$, поэтому левая часть уравнения меньше 35,768. Значит, уравнение решений не имеет.

2. Область допустимых значений $\begin{cases} -1 \leq y^2 - y + 1 \leq 1, \\ -1 \leq y^2 + y + 1 \leq 1. \end{cases}$ Если вычтем из первого неравенства второе, то получим следствие $0 \leq -2y \leq 0$, откуда $y = 0$.

Проверим, верно ли неравенство при $y = 0$. $\operatorname{arcsin}(y^2 - y + 1)|_{y=0} =$

$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(y^2 + y + 1)|_{y=0} = \arccos 1 = 0$. Так как $\frac{\pi}{2} > 0$, неравенство неверно. Значит, неравенство решений не имеет.

3. $y'(x) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$, $y''(x) = \frac{-a^2x}{\sqrt{(1-a^2x^2)^3}}$. Подставив в уравнение производные, получим (т. к. $\frac{y''}{y'} = \frac{-a^2x}{1-a^2x^2} \cdot \frac{a^2x}{1-a^2x^2} = \frac{x}{1-x^2} \Leftrightarrow a^2x(1-x^2) - x(1-a^2x^2) = 0$, то есть $x(a^2 - a^2x - 1 + a^2x^2) = 0 \Leftrightarrow x(a^2 - 1) = 0$).

Так как равенство должно быть верно для всех допустимых значений x , $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Итак, $a = \pm 1$.

4. Например, $x = 0$. Действительно, $\arcsin(0-a)$, $\arcsin 0$, $\arcsin(0+a)$, равные соответственно $-\arcsin a$, 0 , $\arcsin a$, образуют арифметическую прогрессию.

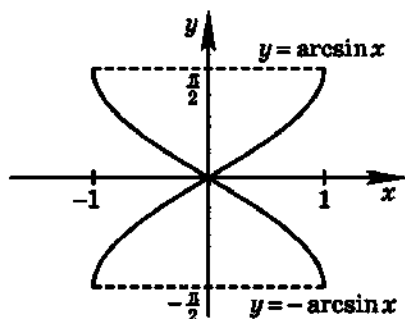


Рис. 147

5. Пусть x_0 — абсцисса точки пересечения. Так как функции имеют производные, тангенсы углов касательных к графикам в точке x_0 равны $y'_1 = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x_0^2}}$, $y'_2 = \frac{-1}{\sqrt{1-x_0^2}}$. Касательные перпендикулярны, если $y'_1 \cdot y'_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{1-a^2x_0^2} \sqrt{1-x_0^2}} = 1$. Это равенство верно, например, для $x_0 = 0$, $a = 1$. При $a = 1$ (рис. 147) $y_1 = \arcsin x$, $y_2 = \arccos x - 0,5\pi = -(0,5\pi - \arccos x) = -(0,5\pi - \arccos x) = -\arcsin x$.

Вариант 2

- Если заменить x на $-x$, получим уравнение вар. 1, которое не имеет решений. Поэтому исходное уравнение не имеет решений.
- Аналогично вар. 1, можно показать, что область допустимых значений $y = 0$, при котором неравенство неверно. Нет решений.
- Так как $y'(x) = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$, $y''(x) = \frac{a^2x}{\sqrt{(1-a^2x^2)^3}}$, то $\frac{y''}{y'} = \frac{a^2x}{1-a^2x^2}$ и исходное уравнение имеет вид $\frac{a^2x}{1-a^2x^2} = \frac{x}{1-x^2}$, которое верно для всех допустимых значений x при $a = \pm 1$.
- Да, например, $x = 0$. Для $x = 0$ $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, и прогрессия имеет разность $d = \arccos a - \frac{\pi}{2}$.

5. Да, в точке $x=0$. Действительно, тангенсы углов наклона касательных $y'_1 = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$, $y'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в этой точке равны соответственно $y'_1(0) = -a$, $y'_2(0) = 1$. Если $a=1$, $y'_1 \cdot y'_2 = -1$, то есть $\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\operatorname{ctg} \alpha_2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ — касательные перпендикулярны.

Задание 8.2. Графики обратных тригонометрических функций

Вариант 1

1. а) рис. 148; б) рис. 149; в) рис. 150; г) рис. 151.

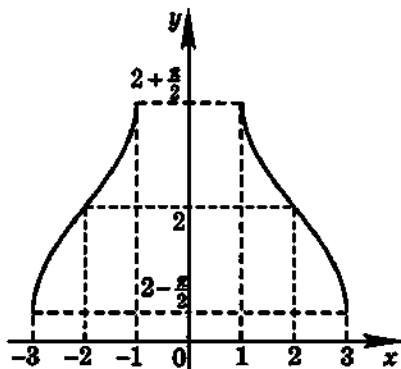


Рис. 148

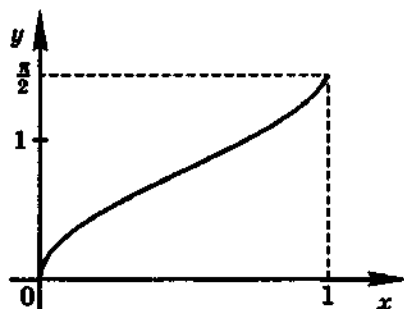


Рис. 149

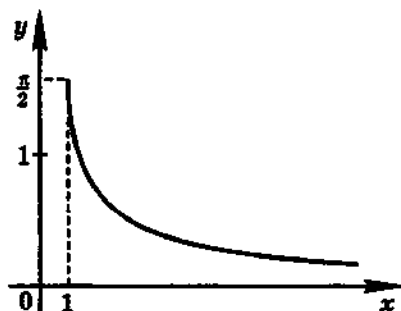


Рис. 150

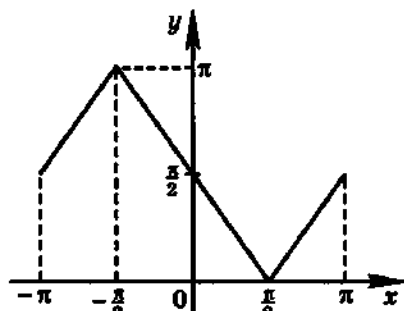


Рис. 151

2. Исходное равенство равносильно следующей системе (это следует из монотонности $\arcsin x$)

$$\begin{cases} xy = x + y, \\ |x + y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \frac{1}{x-1}, \\ |x + y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \frac{1}{x-1}, \\ -1 \leq x + y \leq 1. \end{cases}$$

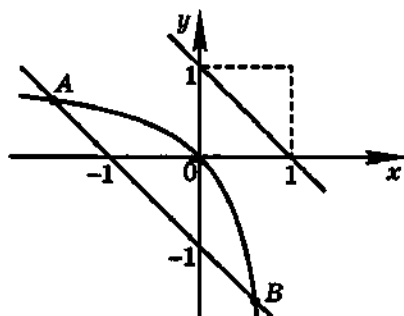


Рис. 152

Искомая кривая — дуга гиперболы AOB $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ (рис 152).

$$A = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Точки A и B определены из условия

$$\begin{cases} y = 1 + \frac{1}{x-1}, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Вариант 2

1. а) рис. 153; б) рис. 154; в) рис. 155; г) рис. 156.

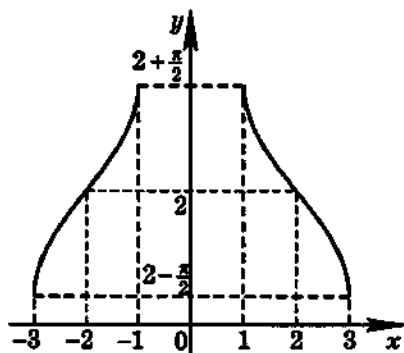


Рис. 153

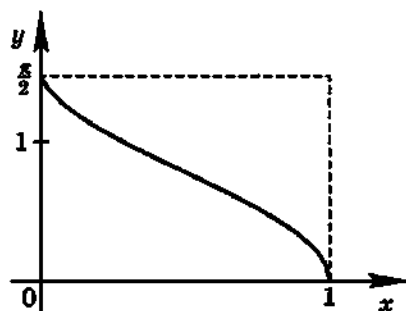


Рис. 154

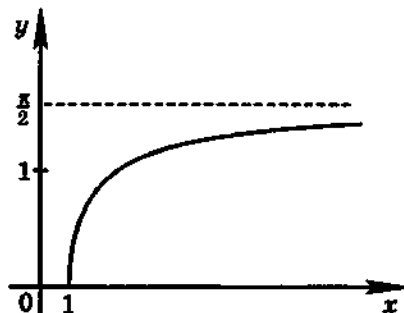


Рис. 155

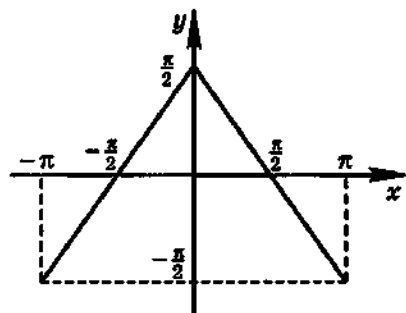


Рис. 156

2. Координаты искомых точек удовлетворяют равносильным условиям $\begin{cases} xy = x + y, \\ |x + y| \leq 1 \end{cases}$ (следствие монотонности $\arccos x$). Это множество точек см. в вар. 1.

**Задание 8.3. Тождества, уравнения и неравенства,
содержащие арксинус и арккосинус**

Вариант 1

1. Если $x < 0$, то $\arccos \frac{x^2+1}{2x} > \frac{\pi}{2}$, а так как при этом $\arcsin x < 0$, то отрицательных решений x не может быть.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \sin(\arcsin x) = \sin(\arccos \frac{x^2+1}{2x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 = \frac{4x^2 - (x^2+1)^2}{4x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 = -\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}. \end{cases}$$

Выражение в левой части $x^2 \geq 0$, в правой части $-\frac{(x^2-1)^2}{4x^2} \leq 0$. Имеет

смысл только случай $\begin{cases} x^2 = 0, \\ -\frac{(x^2-1)^2}{4x^2} = 0. \end{cases}$ Эта система не имеет решений,

поэтому не имеет решений и исходное уравнение.

2. Так как $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ и $\arccos x$ убывающая функция, исходное неравенство равносильно следующим:

$$-1 \leq x^2 - 3x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \leq 0, \\ x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{11}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{11}}{2}, \\ \begin{cases} x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{11}}{2}, \\ \frac{3-\sqrt{11}}{2} \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Целые решения: $x = 0, x = 3$.

3. $\arcsin x$ — возрастающая функция, и $\sin t$ возрастает на $[0; \frac{\pi}{2}]$, поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(\arcsin 2x) > \sin x, \\ 0 \leq x \leq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > \sin x, \\ 0 \leq x \leq 0,5. \end{cases}$$

Так как для $x > 0$ $\sin x < x$, неравенство верно. Исходное неравенство также верно.

4. а) Так как значения арксинуса и арккосинуса неотрицательного числа принадлежат промежутку $[0; \frac{\pi}{2}]$ и косинус убывает на этом промежутке, то предполагаемое равенство равносильно следующему:
- $$\cos(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}) = \cos(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}})} \Leftrightarrow$$
- $$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Значит, равенство верно.

б) Аналогично можно доказать, что $\arccos \frac{t}{\sqrt{t^2+z^2}} = \arcsin \frac{z}{\sqrt{t^2+z^2}}$, где $t \geq 0$, $z \geq 0$, $t, z \in \mathbb{R}$.

5. Покажем, что это выражение равно нулю, то есть

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}).$$

Для $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \leq 1$. Действительно,

$$-1 \leq xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} xy \leq 1 + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}, \\ \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \leq xy + 1. \end{cases}$$

Так как $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, то $0 \leq xy \leq 1$ и $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \leq 1$, $1 + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq 1$, $xy + 1 \geq 1$, и поэтому неравенства верны. Это означает, что в исходном равенстве в правой части аргумент арккосинуса в промежутке $[-1; 1]$ и его значения в пределах $[0; \pi]$. Так как $0 \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \arccos y \leq \frac{\pi}{2}$, то и значения левой части в пределах $[0; \pi]$. Косинус на промежутке $[0; \pi]$ убывает, поэтому исходное равенство равносильно следующему:

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x + \arccos y) &= \cos(\arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2})) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\arccos x) \cos(\arccos y) - \sin(\arccos x) \sin(\arccos y) = \\ &= xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} = xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

Значит, равенство верно, а исходное выражение равно нулю. Заметим, что если x и y не принадлежат промежутку $[0; 1]$, равенство может быть неверным. Например, $x = y = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} = -\frac{1}{2} \text{ и } \arccos(-\frac{1}{2}) + \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{4\pi}{3},$$

$$\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \text{ и } \frac{4\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}.$$

Вариант 2

1. Нет решений. См. вар. 1.
2. Исходное неравенство равносильно неравенству $-\frac{1}{2} \leq x^2 - 3x \leq 1$, которое имеет целые решения $x = 0$, $x = 3$.

3. Нет. Например, для $x=1$ $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1$.

4. См. вар. 1.

5. Выражение равно нулю. Докажем, что для $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$. Так как для $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ $0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x - \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$.

Покажем, что $-1 \leq x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \leq 1$, то есть

$$\begin{cases} x\sqrt{1-x^2} \leq 1 + y\sqrt{1-x^2}, \\ y\sqrt{1-x^2} \leq 1 + x\sqrt{1-y^2}, \end{cases}$$

для $x \in [0; 1]$ и $y \in [0; 1]$ левые части не превосходят 1, правые не меньше 1. Значит, наше предположение верно и значения арксинуса от $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$ существуют и находятся в пределах $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Для углов из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ значения синуса возрастают,

поэтому рассмотрим равносильное равенство:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x - \arcsin y) &= \sin(\arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin y) - \sin(\arcsin y) \cos(\arcsin x) &= \\ = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{1-\sin^2 \arcsin y} - y\sqrt{1-\sin^2 \arcsin x} &= \\ = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} &= x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Значит, равенство верно, и исходное выражение равно нулю.

Задание 8.4. Интегрирование при помощи арксинуса и арккосинуса

Вариант 1

1. Сделаем замену переменной $t = 3x$,

$dt = 3dx$, тогда

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \arcsin t + C = \frac{1}{3} \arcsin(3x) + C.$$

Так как $F(0) = \frac{\pi}{2}$, то $C = \frac{\pi}{2}$

и $F(x) = \frac{1}{3} \arcsin(3x) + \frac{\pi}{2}$ (рис. 157).

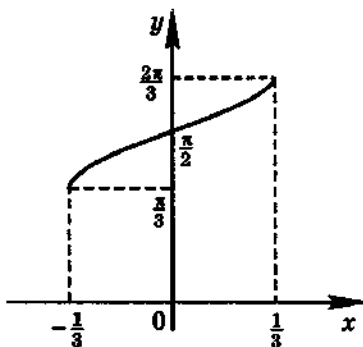


Рис. 157

2. Сделаем замену переменной $t = \frac{x}{a}$,

$dt = \frac{dx}{a}$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Определенный интеграл равен

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

3. Сделаем замену переменной $t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{1}{x^2} dx$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C.$$

Вариант 2

1. $F(x) = \frac{1}{2} \arcsin 2x + \frac{\pi}{2}$ (рис. 158).

$$\begin{aligned} 2. \int_a^{-a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \\ &= \int_{-|a|}^{|a|} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} \Big|_{-|a|}^{|a|} = \pi \end{aligned}$$

(см. вар. 1).

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \arcsin \frac{1}{x} + C$
(см. вар. 1).

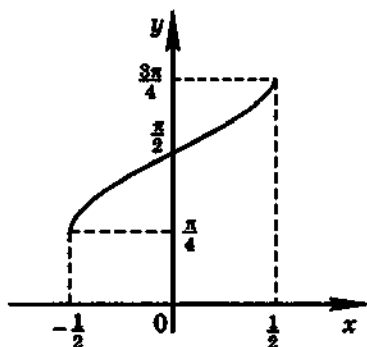


Рис. 158

Задание 8.5. Свойства обратных тригонометрических функций. Производная этих функций

Вариант 1

1. Как известно, область значений функции $y = \operatorname{arctg} x$ есть $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Пусть $a > 0$, тогда $z(y)$ возрастает. Выберем a и b так, чтобы

$$\begin{cases} z(-\frac{\pi}{2}) = 0, \\ z(\frac{\pi}{2}) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}a + b = 0, \\ \frac{\pi}{2}a + b = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\pi}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Так как $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $z(y) \in (0; 1)$. Тогда $z(x) = a \operatorname{arctg} x + b$ принимает все значения из промежутка $(0; 1)$.

2. Известно, что для $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$. Тогда $\operatorname{arctg} \alpha < \alpha$. Так как $x_1 = 100$, $0 < \operatorname{arctg} 100 < \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \operatorname{arctg} x_1 < x_1$, $x_3 = \operatorname{arctg} x_2 < x_2$ и т. д. $x_{n+1} < x_n$ — последовательность убывает и ограничена снизу $0 < x_n$. По теореме Вейерштрасса последовательность имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \operatorname{arctg} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

и если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $a = \operatorname{arctg} a$, и так как для $a > 0$ $\operatorname{arctg} a < a$, то равенство может быть только при $a = 0$. Значит, предел равен нулю.

3. Область значений $x = \operatorname{arctg} t$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Область значений $y = \operatorname{arctg} t^{-1}$, $y \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2})$. Для $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $t = \operatorname{tg} x$, тогда $y(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{\operatorname{tg} x})$ — это функция от x , заданная на $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
4. Прямая $x = 0$ — это ось OY . Угол пересечения графика функции с осью OY равен 45° , если тангенс угла наклона касательной равен 45° и 135° , то есть $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1 \Leftrightarrow y'(0) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{-a}{1+a^2 x^2} = \pm 1 \Leftrightarrow -a = \pm 1$.
Значит, $a = \pm 1$ (рис. 159).

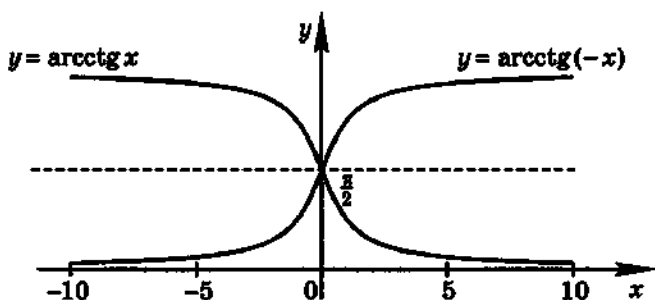


Рис. 159

5. Для $x > 0$ график $y = \operatorname{arctg} x$ выпуклый вверх, поэтому
- $$\frac{\operatorname{arctg}(x_0 - \Delta x) + \operatorname{arctg}(x_0 + \Delta x)}{2} < \operatorname{arctg} x_0,$$

откуда

$$\operatorname{arctg}(x_0 - \Delta x) + \operatorname{arctg}(x_0 + \Delta x) < 2 \operatorname{arctg} x_0.$$

Пусть $x_0 = 2$, $\Delta x = 1$. Тогда

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 3 < 2 \operatorname{arctg} 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3 < 2 \operatorname{arctg} 2 \Rightarrow (\text{т. к. } \pi > 3)$$

$$\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3 < 2 \operatorname{arctg} 2 \text{ (рис. 160).}$$

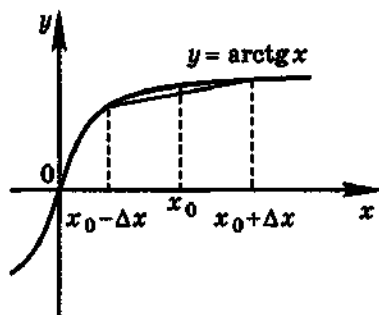


Рис. 160

Вариант 2

1. Да, например $a = -\frac{1}{x}$, $b = -\frac{1}{2}$ (см. вар. 1).
2. Предел равен нулю. Для доказательства использовать: при $\alpha < 0$ $\operatorname{arctg} \alpha > \alpha$. См. вар. 1.
Можно также рассмотреть последовательность $y_1 = 100 = -x_1$, $y_2 = -\operatorname{arctg} x_1 = \operatorname{arctg} y_1$. Как показано в вар. 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3. $y(x) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right)$.

4. $\alpha = \pm 1$.

5.

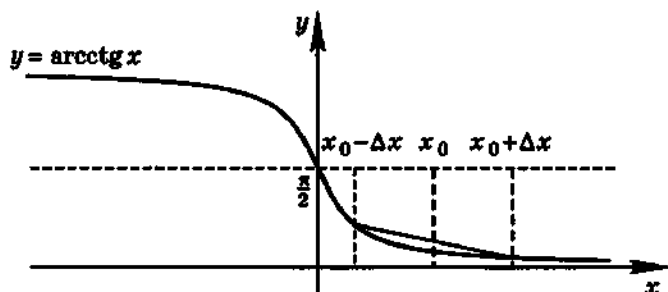


Рис. 161

Для $x > 0$ график функции $y = \operatorname{arccotg} x$ вогнутый (рис. 161), поэтому

$$\operatorname{arccotg} x_0 < \frac{\operatorname{arccotg}(x_0 - \Delta x) + \operatorname{arccotg}(x_0 + \Delta x)}{2},$$

откуда $2 \operatorname{arccotg} x_0 < \operatorname{arccotg}(x_0 - \Delta x) + \operatorname{arccotg}(x_0 + \Delta x)$. Пусть $x_0 = 2$ и $\Delta x = 1$. Тогда $2 \operatorname{arccotg} 2 < \operatorname{arccotg} 1 + \operatorname{arccotg} 3$, и так как $\operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} < 1$, то $2 \operatorname{arccotg} 2 < 1 + \operatorname{arccotg} 3$.

Задание 8.6. Графики обратных тригонометрических функций

Вариант 1

1. а) $y = \operatorname{arctg} x - x$. Рис. 162.

б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$. Рис. 163.

в) $y = \operatorname{arctg}(1 - 2|x|)$. Рис. 164.

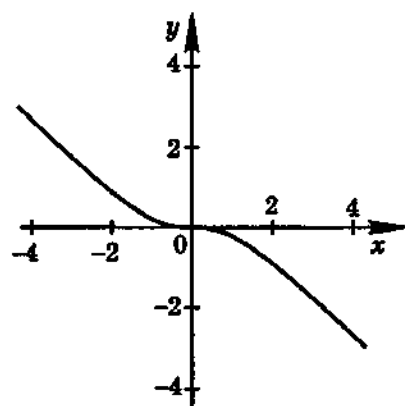


Рис. 162

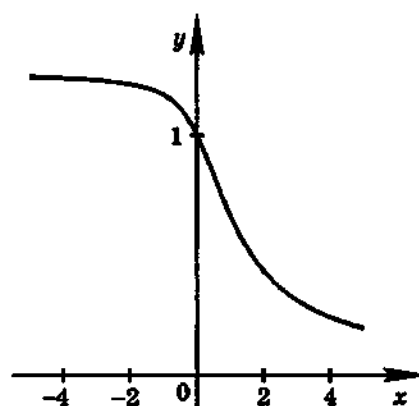


Рис. 163

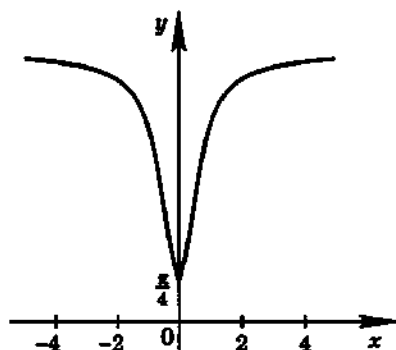


Рис. 164

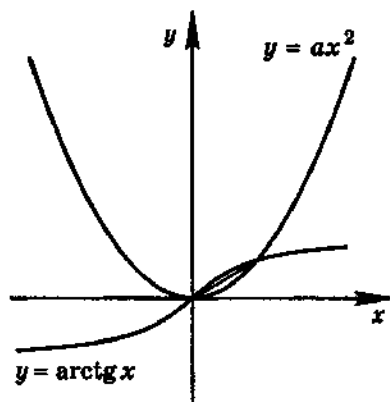


Рис. 165

2. Так как $\operatorname{ctg} z$ убывающая функция, исходное неравенство при $z \neq 0$ равносильно следующему $z < \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} z^2) \Leftrightarrow z < \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z^2)} \Leftrightarrow z < \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z^3 < 1, z \neq 0 \Leftrightarrow z < 1, z \neq 0$. Но $z = 0$ удовлетворяет исходному неравенству. Итак, решение: $z < 1$.

3. Ясно, что $x = 0$ — корень уравнения и абсцисса точки пересечения графиков $y = \operatorname{arctg} x$, $y = ax^2$. График $y = \operatorname{arctg} x$ для $x > 0$ выпуклый вверх, а график $y = ax^2$ — вогнутый (выпуклый вниз) (рис. 165). Для любой хорды, например, с точками $O(0; 0)$ и $M(x_0; \operatorname{arctg} x_0)$ график $y = \operatorname{arctg} x$ лежит выше хорды, также для хорды $O(0; 0)$ и $N(x_0; ax_0^2)$ график $y = ax^2$ лежит ниже хорды (рис. 166). Так как для $x_0 > 0$ $x_0 > \operatorname{arctg} x_0$, можно подобрать x_0 такое, что $ax_0^2 > x_0 > \operatorname{arctg} x_0$, точка N выше точки M . В этом случае дуги графиков пересекутся в некоторой точке K , абсцисса которой $0 < x_k < x_0$. x_k — второй корень уравнения. Итак, уравнение имеет два корня.

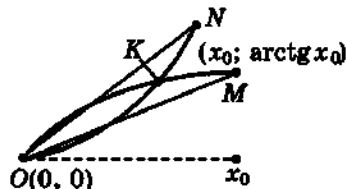


Рис. 166

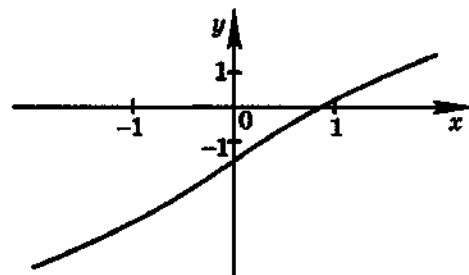


Рис. 167

Вариант 2

1. а) рис. 167;
- б) рис. 168;
- в) рис. 169.

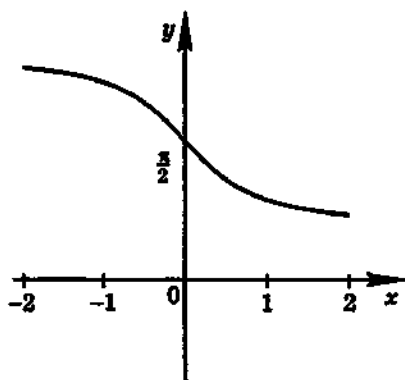


Рис. 168

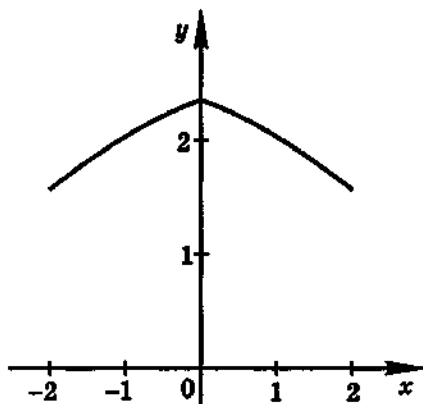


Рис. 169

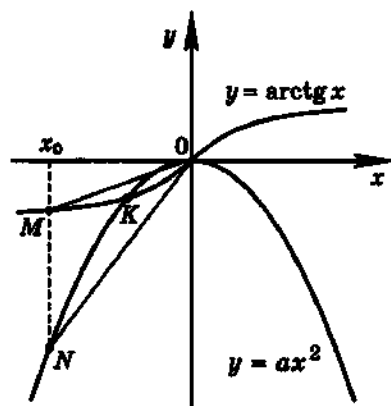


Рис. 170

2. Исходное неравенство при $z \neq 0$ равносильно следующему
 $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z) < \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z^2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow z < \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} z^2)} \Leftrightarrow z < \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z^3 < 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow z < 1, z \neq 0. z = 0$ удовлетворяет исходному неравенству, поэтому решение $z < 1$.

3. Если рассматривать графики $y = ax^2$ и $y = \operatorname{arctg} x$, то имеет место центральная симметрия относительно начала координат к графикам задачи 3 вар. 1.

Корень $x = 0$ и корень $x_k < 0$. Всего два корня (рис. 170).

Задание 8.7. Тожества, уравнения и неравенства, содержащие арктангенс и арккотангенс

Вариант 1

1. а) Следствием исходного уравнения является следующее:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1-a) - \operatorname{arctg}(a+1)) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1-a - \frac{1}{a+1}}{1 + \frac{1-a}{a+1}} = 1 \Leftrightarrow a^2 = -2 \Leftrightarrow a \in \emptyset.$$

Нет решений. Так как следствие не имеет решений, исходное уравнение не имеет решений.

б) Исходное уравнение равносильно следующему
 $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x,$

откуда следует уравнение

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1)) &= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} &= \frac{3x-x}{1+3x^2} \Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{2x}{1+3x^2}, \text{ если } x > 0, \text{ то} \\ 1+3x^2 &= 2-x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Так как $x = \frac{1}{2}$ — корень уравнения-следствия, проверим подстановкой, удовлетворяет ли он исходному уравнению. Имеем для $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-1\right) + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}+1\right) &= \operatorname{arctg}\frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{3}{2} &= \operatorname{arctg}\frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

То есть $x = \frac{1}{2}$ — корень исходного уравнения.

2. Область значений $\operatorname{arccctg} x$ есть $(0; \pi)$, область значений $\operatorname{arctg}(x+y)$ — промежуток $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Равенство возможно только при $x > 0$ и $x+y > 0$. При этом область значений левой и правой частей $(0; \frac{\pi}{2})$. Тогда исходное уравнение равносильно системе

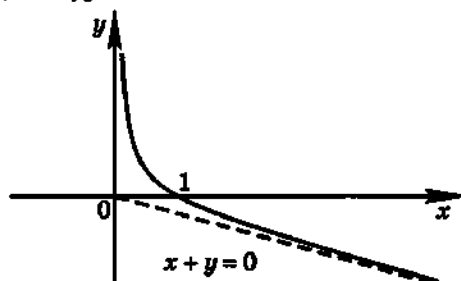


Рис. 171

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + y > 0, \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+y)) = \operatorname{tg}(\operatorname{arccctg} x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x + y > 0, \\ x + y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x + y > 0, \\ y = \frac{1}{x} - x. \end{cases}$$

Искомое множество — точки графика $y = \frac{1}{x} - x$ для $x > 0$.

3. Так как $\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} 0,75$, то $2 \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 0,75 > 0$. Так как $0 < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$, то $0 < 2 \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 0,75 < \pi$. На промежутке $(0; \pi)$ функция $\operatorname{ctg} z$ убывает. Вычислим

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 0,75) &= \frac{\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} 2) \cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 0,75) + 1}{-\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} 2) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 0,75)} = \\ &= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0,75)} + 1}{-\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} 2) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 0,75)} = \frac{\frac{1-4}{4} \cdot \frac{4+1}{3} + 1}{-\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} 2) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 0,75)} = \\ &= \frac{-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + 1}{-\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} 2) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 0,75)} = 0. \end{aligned}$$

Так как котангенс исходного выражения равен 0 и значение выражения принадлежит промежутку $(0; \pi)$, получаем, что значение исходного выражения равно $\frac{\pi}{2}$.

4. а) Рассмотрим график $y = \arctg x$ (рис. 172).

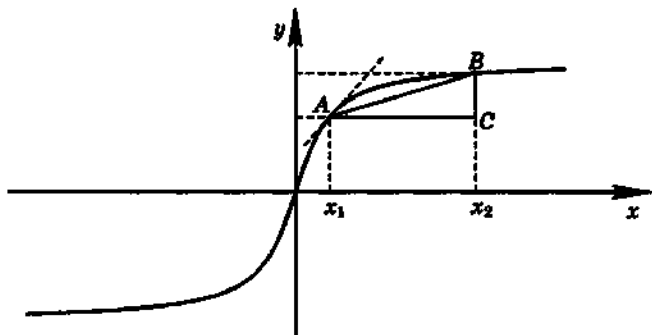


Рис. 172

Пусть $x_2 > x_1 > 0$. Покажем, что $\arctg x_2 - \arctg x_1 \leq x_2 - x_1$. Для любого x $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, поэтому угол наклона касательной меньше

45° . Если рассмотреть прямоугольный треугольник BAC , катеты которого равны $x_2 - x_1$ и $\arctg x_2 - \arctg x_1$, то для $\angle BAC$ имеем

$$\operatorname{tg}(\angle BAC) \leq \operatorname{tg} \alpha = (\arctg x_1)' \leq 1.$$

Из треугольника BAC : $\operatorname{tg}(\angle BAC) \leq \frac{\arctg x_2 - \arctg x_1}{x_2 - x_1} \leq 1$, откуда

$$\arctg x_2 - \arctg x_1 \leq x_2 - x_1.$$

Если $x_2 = 3$ и $x_1 = 2$, то $\arctg 3 - \arctg 2 \leq 3 - 2 \Leftrightarrow \arctg 3 - \arctg 2 \leq 3 - 2$, то есть $\arctg 3 - \arctg 2 \leq 1$.

б) Обобщение $\arctg(n+1) - \arctg n \leq 1$. Это следует из пункта (а).

Вариант 2

1. а) Нет решений. Если заменить a на $-a$, получим уравнение, рассмотренное в вар. 1, которое не имеет решений.

б) $x = -0,5$. См. решение вар. 1.

2. Исходное уравнение удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{x}, \\ x>0, \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x}-x, \\ x>0, \\ y>-x. \end{cases} \quad \text{Получили множество точек вар. 1.}$$

3. Так как $0,25 = \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\arctg 0,25 < \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, и так как $\frac{7}{23} < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\arctg \frac{7}{23} < \frac{\pi}{6}$. Поэтому искомое выражение меньше $3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. Вычислим тангенс искомого выражения, применяя формулы тангенса суммы углов,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 0,25 + \operatorname{arctg} \frac{7}{23}) &= \frac{\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 0,25) + \frac{7}{23}}{1 - \frac{7}{23} \cdot \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 0,25)} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0,25) + \frac{7}{23}}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 0,25)} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{7}{23} \cdot \frac{2 \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 0,25)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 0,25)}} = \\ &= \frac{\frac{2 \cdot 0,25}{1 - (0,25)^2} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{7}{23} \cdot \frac{2 \cdot 0,25}{1 - (0,25)^2}} = 1. \end{aligned}$$

Так как тангенс равен 1 и искомое выражение в промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$, то оно равно $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

4. См. вар. 1.

Задание 8.8. Интегрирование при помощи арктангенса и арккотангенса

Вариант 1

1. График функции приведен на рис. 173.

Площадь равна

$$S = \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = \left[\begin{array}{l} \text{замена} \\ t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{8}.$$

2. Пусть $F(x)$ — первообразная. Так как $F'(x) = f(x) > 0$, то первообразная $F(x)$ возрастает.

3. $\left| \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+4} \right) dx \right|$ — это площадь фигуры, ограниченной графиками $y_1 = \frac{1}{x^2+2}$, $y_2 = \frac{1}{x^2+4}$, $x=0$, $x=1$ (рис. 174).

Так как подинтегральная функция убывает, площадь можно оценить следующим образом: $1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) < S < 1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \Leftrightarrow \frac{2}{15} < S < \frac{1}{4}$. Так как $\frac{2}{15} > 0,1$, неравенство неверно.

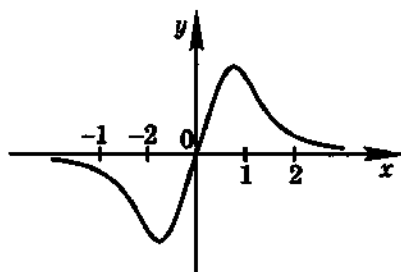


Рис. 173

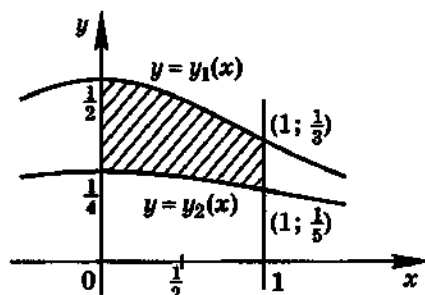


Рис. 174

4. Так как $\frac{x^4}{x^2+4} = x^2 - 4 + \frac{16}{x^2+4}$, то интеграл можно вычислять следующим образом: $\int \left(x^2 - 4 + \frac{16}{x^2+4} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 4x + 8 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.

5. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Вычислим интеграл по формуле правых прямоугольников с шагом $h=0,1$: $S_1 = 0,1 \left(\frac{1}{1+0,1^2} + \frac{1}{1+0,2^2} + \frac{1}{1+0,3^2} + \dots + \frac{1}{1+0,9^2} + \frac{1}{1+1} \right)$ (рис. 175).

После несложных преобразований имеем

$$10S_1 - 0,5 = \frac{1}{1+0,01} + \frac{1}{1+0,04} + \dots + \frac{1}{1+0,81} = \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,04} + \dots + \frac{1}{1,81}.$$

Так как $S_1 < \frac{\pi}{4}$, то искомая сумма меньше

$$\frac{10\pi}{4} - 0,5 = 2,5\pi - 0,5 < 2,5 \cdot 3,2 - 0,5 = 7,5.$$

Вариант 2

- Площадь равна $S = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{8}$. График функции $y = -\frac{x}{1+x^4}$ получается из графика функции $y = \frac{x}{1+x^4}$ (рис. 173) зеркальным отображением относительно оси OX . Поэтому искомые площади равны.
- Пусть $F(x)$ — первообразная. Так как $F'(x) = f(x)$ и $f(x) > 0$, то первообразная $F(x)$ возрастает.
- Так как для $x > 0$ $\frac{1}{x^2+0,25} - \frac{1}{x^2+0,5} = \frac{0,25}{(x^2+0,25)(x^2+0,5)} < 2$, то интеграл на промежутке $[0; 1]$ меньше 2.
- Так как $\frac{x^4}{x^2+2} = x^2 - 2 + \frac{4}{x^2+2}$, то интеграл равен $\int \left(x^2 - 2 + \frac{4}{x^2+2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 2x + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

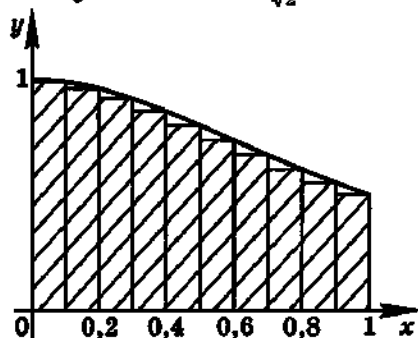


Рис. 175

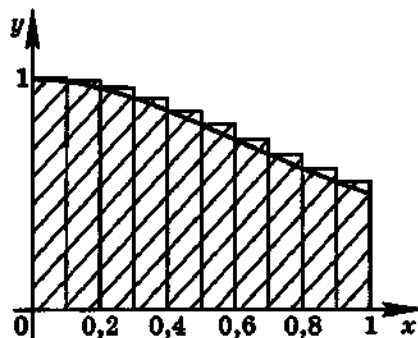


Рис. 176

5. Рассмотрим интеграл $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ и оценим его по формуле левых прямоугольников с шагом $h = 0,1$ (рис. 176);
 $S_1 > S$, $S_1 = 0,1 \left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+0,1^2} + \frac{1}{1+0,2^2} + \frac{1}{1+0,3^2} + \dots + \frac{1}{1+0,9^2} \right)$,
 $10S_1 = 1 + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,04} + \dots + \frac{1}{1,81}$, откуда $\frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,04} + \dots + \frac{1}{1,81} = 10S_1 - 1 >$
 $> \frac{10\pi}{4} - 1 = 2,5 \cdot 3 - 1 = 6,5$. Утверждение доказано.

Задание 8.9. Контрольное задание

Вариант 1

1. Покажем, что для $|x| \leq 1$ $f(x) = 0$. Так как функция нечетная, пусть $x \geq 0$. Рассмотрим $\sin(-2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}) =$
 $= \sin(-2 \arctg x) \cos(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}) + \cos(-2 \arctg x) \sin(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}) =$
 $= -2 \sin(\arctg x) \cos(\arctg x) \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2} + (2 \cos^2(\arctg x) - 1) \frac{2x}{1+x^2} =$
 $= -2 \cos^2(\arctg x) \tg(\arctg x) \frac{1-x^2}{1+x^2} + 2 \cos^2(\arctg x) \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} =$
 $= -2 \cos^2(\arctg x) \cdot x \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} + 2 \cos^2(\arctg x) \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} =$
 $= \frac{2 \cos^2(\arctg x)}{1+x^2} \cdot x \cdot (-1+x^2+2) - \frac{2x}{1+x^2} = 2x \cos^2(\arctg x) - \frac{2x}{1+x^2}.$

Используем известное равенство $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tg^2 \alpha}$, тогда

$$\cos^2(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Так как это синус исходного выражения, то его значение равно $k\pi$, где k — некоторое целое число. Так как при $x = 0$ выражение равно нулю, то и для $|x| \leq 1$ оно тоже равно нулю (рис. 177).

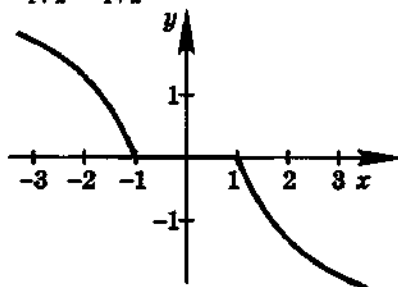


Рис. 177

2. Эту задачу можно решить, используя области определения и области значений функций. Область определения: $-1 \leq 0,5x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$. Пусть $x \in [0; 2]$. При этом $0,5x - 1 \leq 0$, и значит, $\arccos(0,5x - 1) \geq \frac{\pi}{2}$, $1 \leq 3 - x \leq 3$, и поэтому $2 \arctg(3 - x) \leq 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Значит, $x \in [0; 2]$ — решение.

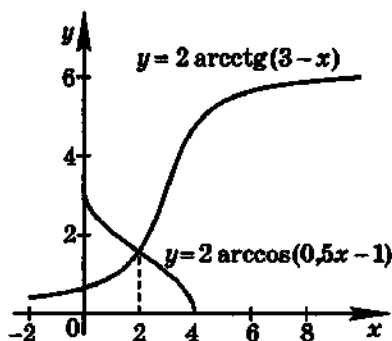


Рис. 178

что функция $f(x)$ возрастающая. Действительно,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0.$$

Производная положительна, значит, $f(x)$ возрастает. Возрастающая функция каждое свое значение принимает один раз, поэтому из $f(x) = f(y)$ следует $x = y$. Значит, $\arctg x = \arctg y$.

4. Если $a = 0$, выражение не имеет смысла. Если $a \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arctg ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{a \arctg ax}.$$

Если обозначить $x = \sin y$, $z = \arctg az$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\arctg z}{az} = \frac{1}{a} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z \cos z} = \frac{1}{a}.$$

5. Область определения $\sqrt{x(x-1)}$ есть множество $\begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$ Область опре-

деления $\arccos(\sqrt{x^2-x+1})$ есть x , удовлетворяющие неравенству $0 \leq x^2-x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$. Область допустимых значе-

$$\text{ний уравнения: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x \geq 1, \\ x \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Проверка показала, что $\begin{cases} x = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ подходят как решения.

6. Рассмотрим область определения арккосинуса. Это $-1 \leq x + |\sin y| \leq 1$, то есть $-1-x \leq |\sin y| \leq 1-x$. Для существования решения необходимо, чтобы выполнялись условия $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ -1-x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$.

Пусть $x \in (2; 4]$. Тогда $0,5x-1 > 0$ и $\arccos(0,5x-1) < \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq 3-x \leq 1$ и поэтому

$$\arctg(3-x) > \frac{\pi}{4} \text{ и}$$

$$2 \arctg(3-x) > \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $x \in (2; 4]$ не удовлетворяют неравенству. Итак, решение: $x \in [0; 2]$ (рис. 178).

3. Если обозначить $f(x) = x + \arcsin x$, то исходное равенство можно записать так: $f(x) = f(y)$. Покажем,

Заметим, что если $x < 0$, то $-\operatorname{tg} 0,25\pi x > 0$, и левая часть уравнения положительна. Значит, уравнение отрицательных решений не имеет. Если $0 \leq x \leq 1$, то $\operatorname{tg} 0,25\pi x \leq 1$, и поэтому $1 - \operatorname{tg} 0,25\pi x \geq 0$. Так как для любого x $\arccos(x + |\sin y|) \geq 0$, то единственное условие существования корня следующее:

$$\begin{cases} 1 - \operatorname{tg} 0,25\pi x = 0, \\ \arccos(x + |\sin y|) = 0, \end{cases}$$

откуда имеем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 0,25\pi x = 0, \\ 0 \leq x \leq 1, \\ x + |\sin y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ |\sin y| = 0. \end{cases}$$

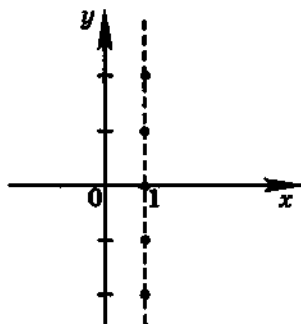


Рис. 179

Решение есть множество точек с абсциссами $x = 1$ и ординатами $y = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 179).

7. Для $n = 1$ равенство верно. Покажем, что если верно для n , то верно и для $n + 1$, то есть

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot n^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n+2}.$$

Согласно предположению последнее равенство равносильно следующему: $\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n+2}$. Так как значение левой части не может быть больше π , а значение правой находится в промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$, пишем равносильное равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+1)^2}) &= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{n+1}{n+2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+1)^2})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+1)^2})} &= \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)^2}} = \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(2n(n+1)+1)(n+1)}{2(n+1)^3 - n} &= \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow (2n^2 + 2n + 1)(n+2) = 2(n+1)^3 - n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2n^3 + 6n^2 + 5n + 2 &= 2n^3 + 6n^2 + 5n + 2. \end{aligned}$$

Итак, тангенсы выражений равны n , так как значение выражения не превосходит π , выражения тоже равны. Таким образом, доказали методом индукции исходное равенство для любого n .

Вариант 2

- Как известно, $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, поэтому функцию $f(x)$ можно записать как $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.
В вар. 1 была рассмотрена функция $-2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Функция $f(x)$ отличается от нее на константу $\frac{\pi}{2}$, и график получается сдвигом на $\frac{\pi}{2}$.
- Рассмотрим область допустимых значений. Это $-1 \leq \frac{x}{6} + \frac{1}{2} \leq 1$, то есть $-9 \leq x \leq 3$, для всех x из области допустимых значений $1 \leq 4-x \leq 13$, поэтому $2 \operatorname{arctg}(4-x) \geq \frac{\pi}{2}$. Так как $\arcsin(\frac{\pi}{6} + 0,5) \leq \frac{\pi}{2}$, то решение — все $x \in [-9; 3]$, кроме таких, что $\begin{cases} \arcsin(\frac{\pi}{6} + 0,5) = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arctg}(4-x) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Итак, решение: $x \in [-9; 3]$.
- Как доказано в вар. 1, $x = y$ и поэтому $\arcsin x = \arcsin y$.
- Если $a = 0$, то выражение не имеет смысла. Если $a \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin ax} = \frac{1}{a}$.
- Область допустимых значений $\begin{cases} x(x+1) \geq 0, \\ x^2 + x + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x = 0. \end{cases}$
Проверка показала, что эти значения являются корнями.
- Множество точек $\begin{cases} x = 1, \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{точки } (1; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$. См. вар. 1.
- Доказательство аналогично вар. 1.

Тема 9

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Задание 9.1. Предел показательной функции

Вариант 1

$$\begin{aligned}
 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3-2}{x+3} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+3} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+3} \right)^{4 \frac{x+3-3}{2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{2} \cdot 4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+3} \right)^{-6} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{2}} \right)^4 \cdot 1 = e^{-4}.
 \end{aligned}$$

Здесь использован замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

2. Функция определена в окрестности точки $x = 0$ и не определена в этой точке. При этом $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Поэтому прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

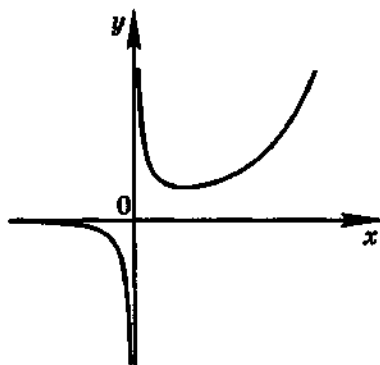


Рис. 180

3. Например, $f(x) = e^{\frac{3}{2}x}$.

$$4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4 + 4 - x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(2^{x-2} - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 4 \frac{2^{x-2} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \ln 2 - 4 = 4 \ln \frac{2}{e}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^2 + a^2 - x^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2(a^{x-2} - 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} =$$

$$= a^2 \ln a - 2a.$$

Вариант 2

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{0.5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)^{-1} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Асимптоты — прямые $x = 0$ и $y = 0$.

3. Например, $f(x) = e^{\frac{x}{4}}$.

$$4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 3^3 + 3^3 - x^3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 3^3}{x - 3} + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^3 - x^3}{x - 3} =$$

$$= 3^3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^{x-3} - 1}{x - 3} + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(9+x^2+3x)}{x-3} = 27 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^{x-3} - 1}{x - 3} + (9+9+9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x-3} =$$

$$= 27 \ln 3 - 27.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^3}{x - a} = a^3 \ln a - 3a^2.$$

Задание 9.2. Производная показательной функции

Вариант 1

1. Функция не является монотонной на области определения. Например, если рассмотреть три точки $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 1$, то $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$. Производная функции в области определения отрицательна: $f'(x) = -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (e^{\frac{1}{x}} + 1) < 0$ при $x \neq 0$. Функция убывает на двух промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

2. Как известно, для функции $y = f(x)$ уравнение касательной в точке x_0 таково: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Для рассматриваемой функции

$$y' = (e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - \sin x \cdot e^{-x}. \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

Уравнение касательной $y = 1 - x$.

3. $h'(z) = a \frac{(e^{az} - e^{-az})^2 - (e^{-az} + e^{az})^2}{(e^{az} + e^{-az})^2}$. Если функция имеет производную и

производная равна нулю в некоторой точке z_0 , то эта точка может быть экстремальной.

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow (e^{az} - e^{-az})^2 - (e^{-az} + e^{az})^2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{az}(-2e^{-az}) = 0 \Leftrightarrow -4 = 0.$$

Производная $h'(z)$ нигде не обращается в нуль. Функция не имеет экстремумов.

4. Пусть $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$; $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$;

$$f''(x) = e^x, \quad g''(x) = 1 + x; \quad f'''(x) = e^x, \quad g'''(x) = 1.$$

$$f'''(0) = 1, \quad g'''(0) = 1 \quad \text{и для } x > 0 \quad f'''(x) > g'''(x).$$

$$f''(0) = g''(0) = 1 \quad \text{и, так как } f'''(x) \geq g'''(x), \quad f''(x) \geq g''(x) \quad \text{для } x \geq 0.$$

$$f'(0) = g'(0) = 1 \quad \text{и, так как } f''(x) \geq g''(x), \quad f'(x) \geq g'(x) \quad \text{для } x \geq 0.$$

$$f(0) = g(0) \quad \text{и, так как } f'(x) \geq g'(x), \quad f(x) \geq g(x) \quad \text{для } x \geq 0.$$

5. Решение можно искать в виде $y(x) = C + e^{\lambda x}$. Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$. Подставим производные в исходное равенство и получим $e^{\lambda x}(\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda) = 0$, откуда имеем уравнение для λ : $\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$. Следовательно, $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$. Условию задачи удовлетворяет, например, функция $y = e^{2x} - 1$ или $y = e^{-x} + e^{2x} - 2$.

Вариант 2

1. Нет. См. вар. 1.
2. Уравнение касательной $y = x$.
3. Функция не имеет экстремумов. См. решение вар. 1. Функция в данном варианте отличается от вар. 1 только знаком.
4. Можно доказать аналогично вар. 1, используя производные и условие монотонности для функций, имеющих производные. Если

$f(x) = e^x$ и $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2e^x$, то $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$,

$$g'(x) = 1 + e^x(x + \frac{x^2}{2}), \quad g''(x) = e^x(2x + \frac{x^2}{2} + 1), \quad g'''(x) = e^x(\frac{x^2}{2} + 3x + 1).$$

5. Например, $y(x) = 2e^{-2x} - 2$.

Задание 9.3. Свойства показательной функции

Вариант 1

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}} > 1$, $\sqrt{2-\sqrt{3}} < 1$, поэтому $\sqrt{2+\sqrt{3}}^{\sqrt{2-\sqrt{3}}} > 1$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}} < 1$.
Значит, первое число больше второго.

2. Нетрудно догадаться, что $x = 0$ — корень. Функция $y = 3^x + 4$ возрастает, а функция $y = 5^{1-x}$ убывает, поэтому уравнение других корней не имеет.

3. $|x-2| \geq 0$, поэтому $2^{-|x-2|} \leq 1$. $|\sin x| \leq 1$, значит, $2^{-|x-2|} \sin x \leq 1$, и равенство достигается только в случае

$$\begin{cases} 2^{-|x-2|} = 1, \\ \sin x = 1. \end{cases}$$

Система решений не имеет, поэтому неравенство также не имеет решений.

4. Сумма взаимно обратных положительных чисел a^z и a^{-z} всегда не меньше 2. $a^z + a^{-z} = 2$ при $z = 0$, при $z = 0$ имеет наименьшее значение функция z^2 . Значит, 2 — есть наименьшее значение левой части. Рассмотрим $z > 0$. Производная $(a^z + a^{-z} + z^2)' = \ln a (a^z + a^{-z}) + 2z > 0$. Значит, левая часть уравнения возрастает. Поэтому существует z_0 , при котором значение ее равно 1987. Уравнение имеет один положительный корень. Левая часть — четная функция. Поэтому при $z = -z_0$ значение этой функции равно 1987. Значит, уравнение имеет два корня.

5. Отношение $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ — монотонная функция при любых $a > 1$ и $b > 1$; при $x = 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$. Значит, нет других x , при которых функции принимают равные значения.

Вариант 2

1. $\lg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1$, $\lg \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Значит, $(\lg \frac{\pi}{3})^{\lg \frac{\pi}{6}} > 1$, $(\lg \frac{\pi}{6})^{\lg \frac{\pi}{3}} < 1$.

$$(\lg \frac{\pi}{3})^{\lg \frac{\pi}{6}} > (\lg \frac{\pi}{6})^{\lg \frac{\pi}{3}}.$$

2. Нетрудно догадаться, что $x = 0$ — корень. Функция $5^x + 15$ возрастает, 4^{2-x} убывает, поэтому других корней нет.
3. $|x-1| \geq 0$, поэтому $2^{-|x-1|} \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. Значит, $2^{-|x-1|} \cos x \leq 1$, и решение возможно только при

$$\begin{cases} 2^{-|x-1|} = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Значит, неравенство решений не имеет.

4. Два решения. См. вар. 1.
5. Нет. См. вар. 1.

Задание 9.4. График показательной функции

Вариант 1

1. а) рис. 181; б) рис. 182.

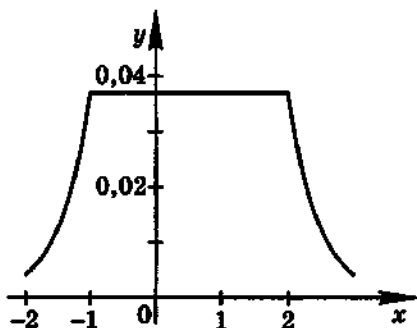


Рис. 181

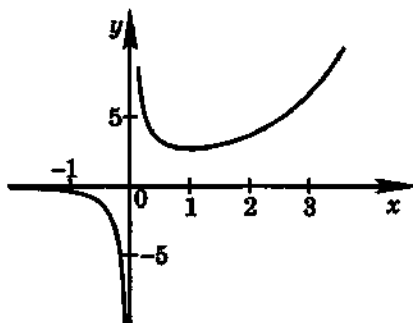


Рис. 182

2. Абсцисса точки пересечения определяется из уравнения

$$a2^t + 1 = 2^{-t} + a \Leftrightarrow a2^t + 1 - a - \frac{1}{2^t} = 0 \Leftrightarrow \frac{a(2^t)^2 + 2^t(1-a) - 1}{2^t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^t - 1)(a2^t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^t = 1, \\ a2^t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ a \neq 0, \text{ для любого } a. \\ 2^t = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

Итак, уравнение имеет корень $t = 0$. Если имеется второй корень, его находят из уравнения $a2^t = -1$. По условию надо определить такие a , при которых второе уравнение не имеет корней, либо он равен нулю. Корень равен нулю, если $a = -1$. Если $a > 0$, корней нет. Итак, графики функций имеют единственную общую точку при $a = -1$ и $a \geq 0$.

Вариант 2

1. а) рис. 183; б) рис. 184.

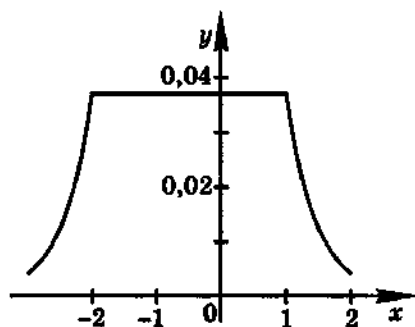


Рис. 183

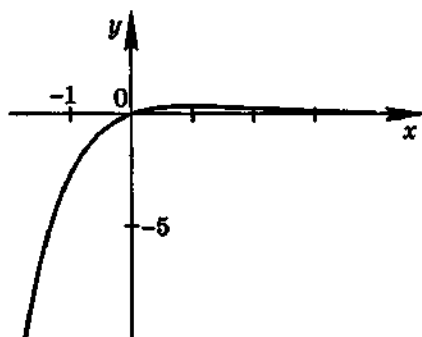


Рис. 184

2. $\begin{cases} a = -1, \\ a \geq 0. \end{cases}$

Задание 9.5. Интегрирование показательной функции

Вариант 1

1. Заметим, что $(e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x}$, поэтому, если $t = e^x + e^{-x}$, интеграл принимает вид $\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$, значит, искомый интеграл равен $\ln(e^x + e^{-x}) + C$.

2. Значение подинтегральной функции не меньше 2 (сумма взаимнообратных положительных чисел). Тогда $\int_0^1 (e^{x^2} + e^{-x^2}) dx > 2 \cdot 1$.

3. $S_1 = \int_0^a e^x dx = e^a - 1$, $S_2 = \int_a^{3a} e^x dx = e^{3a} - e^a$. Так как $S_1 = S_2$, то $e^a - 1 = e^{3a} - e^a \Leftrightarrow e^{3a} - 2e^a + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{3a} - e^a - (e^a - 1) = 0 \Leftrightarrow e^a(e^{2a} - 1) - (e^a - 1) = 0 \Leftrightarrow e^a(e^a - 1)(e^a + 1) - (e^a - 1) = 0 \Leftrightarrow (e^a - 1)(e^{2a} + e^a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = 1, \\ e^a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, $0 < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$, поэтому уравнения не имеют положительных решений. Нет a , удовлетворяющих условию.

4. $e^{x^2} \geq 1+x^2$, тогда $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x^2}} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$. Значит, интеграл сходится.
5. Первообразная $F(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ -e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ (рис. 185).

Вариант 2

1. Заменой $t = e^{-x} + e^x$, $dt = e^x - e^{-x}$ интеграл можно свести к следующему: $-\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C$, тогда искомый интеграл равен $-\ln(e^x + e^{-x}) + C$.
2. Подынтегральная функция при $x \in (0; 1]$ больше 2, при $x = 0$ равна 2, поэтому значение интеграла больше произведения 2 на длину промежутка интегрирования, то есть 1. Значит, утверждение верно.
3. $S_1 = \int_0^{2a} e^{-x} dx = 1 - e^{-2a}$, $S_2 = \int_{2a}^{3a} e^{-x} dx = e^{-2a} - e^{-3a}$. Так как $S_1 = S_2$, то $1 - e^{-2a} = e^{-2a} - e^{-3a} \Leftrightarrow e^{-3a} - 2e^{-2a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{-a} - 1)(e^{-2a} - e^{-a} - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-a} = 1, \\ e^{-a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Последние уравнения не имеют положительных решений. Нет таких a , удовлетворяющих условию задачи.

4. Оценим интеграл сверху. $e^{x^4} \geq 1+x^4$, $e^{-x^4} \leq \frac{1}{1+x^4}$. Тогда
 $\int_{-\infty}^0 e^{-x^4} dx \leq \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^4} \leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-1}^0 1 dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\arctg(-1) - \arctg(x)) + 1 =$
 $= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 1 = 1 + \frac{\pi}{4}$. Значит, исходный интеграл сходится.

5. Первообразная равна $F(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ (рис. 186).

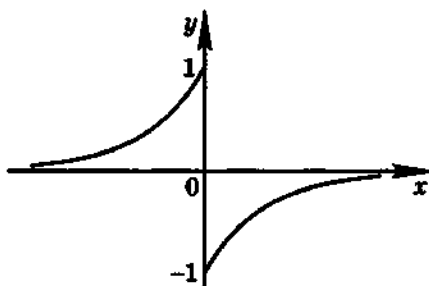


Рис. 185

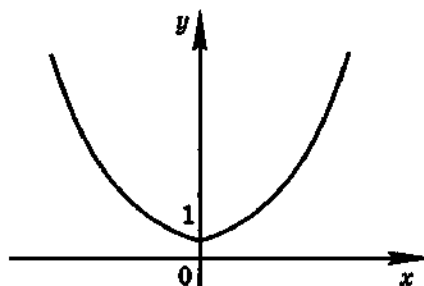


Рис. 186

Задание 9.6. Дифференциальное уравнение показательной функции

Вариант 1

1. а) Из $y' = 2y$ следует, что если $y \neq 0$, то $\frac{dy}{y} = 2dx$, откуда $\ln|y| = 2x + C$, следовательно, $|y| = e^{2x+C}$. Второе условие задачи $y(2x) = \frac{1}{2}y(x)$. Но из первого условия $|y(2x)| = e^{4x+C} \neq \frac{1}{2}e^{2x+C}$. Значит, ненулевых решений нет. Решение $y=0$ удовлетворяет условию.

б) Из первого условия: $y dy = e^{2x} dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + C$. Из второго условия следует, что $C=0$. Значит, решение: $y = e^x$.

в) Решение можно искать в виде $y = e^{\lambda x}$. Подставим y' и y'' в уравнение и получим $4\lambda^3 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0$, следовательно, $4\lambda^3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \text{ Решениями будут функции } e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x} \text{ и их линейные}$$

комбинации, то есть

$$y = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}.$$

Из начальных условий следует, что $y(0) = 2$ и $y(2) = e + e^{-1}$. Тогда для

постоянных C_1, C_2 и C_3 имеем $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 2, \\ C_1 + C_2 e + C_3 e^{-1} = e + e^{-1}, \end{cases}$ решение

$C_1 = 0, C_2 = C_3 = 1$. Тогда искомая функция: $y(x) = e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}$.

2. Пусть $y(t)$ — количество вещества в момент t . Тогда скорость реакции $y' = \frac{dy}{dt}$ пропорциональна количеству вещества, то есть

$$y' = cy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = c dt \Rightarrow \ln y = ct + c_1, y = e^{ct+c_1}. \text{ Начальное количество}$$

вещества $y = e^{c_1}$. В момент времени $t = 1$ $y(1) = e^{c+c_1} = 100$, в момент

$t = 3$ $y(3) = e^{3c+c_1} = 25$. Из двух последних условий $e^{2c} = \frac{1}{4}$, следо-

вательно, $e^c = \frac{1}{2}$ и $e^{c_1} = 200$. Значит, количество вещества в начале

реакции равно $y(0) = e^{c_1} = 200$ г.

Вариант 2

1. а) $y = 0$. См. вар. 1.

б) $y = 2e^{\frac{x}{4}}$.

в) $y = e^{2x} + e^{-2x}$.

2. Пусть $y(t)$ — количество фермента. Тогда $y'(t)$ — скорость брожения и $y'(t) = cy(t)$. По условию, $y(2) = 6$, $y(6) = 24$. Из дифференциального уравнения для $y(t)$ имеем $\frac{dy}{y} = c dt \Rightarrow \ln y = ct + c_1$. $y(t) = e^{ct+c_1}$. Используя начальные условия, определяем начальное количество фермента $y(0) = e^{c_1} = 3$ г.

Задание 9.7. Контрольное задание

Вариант 1

1. а) Нули функции $e^x \sin x$ совпадают с нулями $\sin x$ и равны $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В тех точках, в которых $\sin x = 1$, точки графика $e^x \sin x$ лежат на графике $y = e^x$. В точках $\sin x = -1$ точки искомого графика на графике $y = -e^x$ (рис. 187).

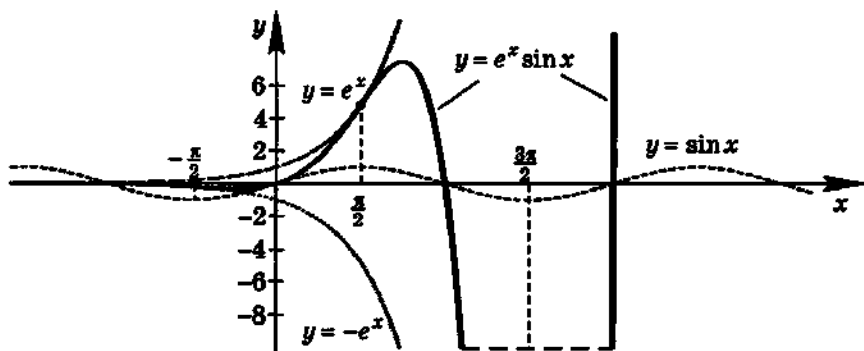


Рис. 187

- б) Вычислим производную функции в точке $x = 0$ и тем самым тангенс угла наклона касательной в этой точке: $y' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$, $y'(0) = 1$. Значит, $\operatorname{tg} \alpha = 1$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

- в) Вычислим неопределенный интеграл по частям

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Итак, первообразная $\int e^x \sin x \, dx$ выражается через $e^x \sin x - e^x \cos x$ и через эту же первообразную, то есть получили для первообразной уравнение $2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$, откуда $\int e^x \sin x \, dx = \frac{\sin x - \cos x}{2} e^x$.

Тогда площадь $S = \int_0^1 e^x \sin x \, dx = \left. \frac{\sin x - \cos x}{2} e^x \right|_0^1 = \frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1)$.

Преобразуем выражение $\frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1) = \frac{1}{2}(e\sqrt{2} \sin(1 - \frac{\pi}{4}) + 1)$.

Так как $\sin(1 - \frac{\pi}{4}) < 1 - \frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{1}{2}(e\sqrt{2} \sin(1 - \frac{\pi}{4}) + 1) < (e\sqrt{2}(1 - \frac{\pi}{4}) + 1) < \frac{1}{2}(2,72 \cdot 1,43 \cdot 0,215 + 1) < 0,92.$$

Значит, $S < 1$.

2. Так как при любом $x \in \mathbb{R}$ $|x-3| \geq 0$, то $2^{-|x-3|} \leq 1$. $-(x^2 - x - 6) \leq 0$, поэтому левая часть уравнения не превосходит 1 и равна 1 при условии
- $$\begin{cases} 2^{-|x-3|} = 1, \\ |x^2 - x - 6| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| = 0, \\ |x-3||x+2| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow |x-3| = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Итак, корень: $x = 3$.

3. Ясно, что $x = 0$ — корень. Рассмотрим функцию, задающую левую часть уравнения $y(x) = 2x + e^x - xe^x$. Вычислим производную $y'(x) = 2 - xe^x$. Вблизи точки $x = 0$ производная положительна. Функция возрастает. Затем, начиная с какого-то $x_0 > 0$, отрицательна — функция убывает. Например, $y'(1) < 0$. Значит, существует некоторая точка $x_k > 0$, что $y(x_k) = 1$, x_k — корень.

4. Искомое неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{10}{\sqrt{221}}\right)^2 + \left(\frac{11}{\sqrt{221}}\right)^2 > 1.$$

Заметим, что $\left(\frac{10}{\sqrt{221}}\right)^2 + \left(\frac{11}{\sqrt{221}}\right)^2 = 1$. Если ввести угол φ , такой, что $\sin \varphi = \frac{10}{\sqrt{221}}$ и $\cos \varphi = \frac{11}{\sqrt{221}}$, исходное неравенство можно записать как

$$\begin{cases} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi > 1, \\ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1. \end{cases}$$

И так как $\begin{cases} \sin^2 \varphi \geq \sin^2 \varphi, \\ \cos^2 \varphi \geq \cos^2 \varphi \end{cases}$ для $z \leq 2$; $\begin{cases} \sin^2 \varphi \leq \sin^2 \varphi, \\ \cos^2 \varphi \leq \cos^2 \varphi \end{cases}$ для $z \geq 2$, неравенство $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi > 1$ выполняется только для $z < 2$. Значит, исходное неравенство имеет решение $z < 2$.

5. Дифференцируем первое равенство. Имеем $y'' = e^x(y + y')$. Полученное равенство не согласуется со вторым для любого x . Единственное решение: $y = 0$.

6. Используем известное свойство

$$\frac{3^a + 3^b + 3^c}{3} \geq \sqrt[3]{3^a \cdot 3^b \cdot 3^c} = \sqrt[3]{3^{a+b+c}} = \sqrt[3]{3^0} = 1,$$

откуда $3^a + 3^b + 3^c \geq 3$.

Вариант 2

1. а) Нули функции совпадают с нулями косинуса $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Точки с такими абсциссами, что $\cos x = \pm 1$, лежат на графике $y = \pm e^x$. Искомый график можно построить, используя графики $y = e^x$, $y = -e^x$, $y = \cos x$ (рис. 188).

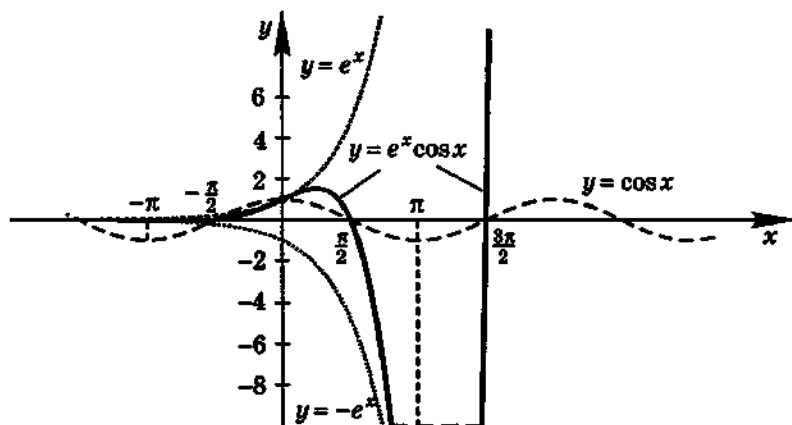


Рис. 188

б) $y' = e^x(\cos x - \sin x)$, $y'(0) = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$. Угол равен 45° .

в) Аналогично вар. 1 вычисляем интеграл:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Откуда $2 \int e^x \cos x \, dx = e^x(\cos x + \sin x)$, $\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + C$.

Значит, $S = \int_0^1 e^x \cos x \, dx = \left. \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} \right|_0^1 = \frac{e}{2}(\cos 1 + \sin 1) - \frac{1}{2}$. Покажем,

что $S > 1$. Действительно,

$$S = \frac{e}{2}(\cos 1 + \sin 1) - \frac{1}{2} = \frac{e\sqrt{2}}{2} \sin\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} > \frac{e\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} > \frac{2.7}{4} \cdot 1.4 \cdot 1.73 - \frac{1}{2} > 1.$$

Итак, $S > 1$.

2. $x = 3$. См. решение вар. 1.

3. Доказательство аналогично вар. 1.

4. Решение аналогично вар. 1: $z > 2$.

5. Решение: $y = 0$.

$$6. \frac{3^{-a} + 3^{-b} + 3^{-c}}{3} \geq \sqrt[3]{3^{-a} \cdot 3^{-b} \cdot 3^{-c}} = \sqrt[3]{3^{-(a+b+c)}} = \sqrt[3]{3^0} = 1 \Rightarrow 3^{-a} + 3^{-b} + 3^{-c} \geq 3.$$

ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Задание 10.1. Логарифмирование и потенцирование

Вариант 1

- $\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4 = 2\log_4 |x| - 1 - 8\log_4 |x| - 2 = -6\log_4 |x| - 3$. Тогда функцию можно записать: $f(x) = -6\log_4 |x| - 3$ (рис. 189).
- $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{4}} = -\log_2 \frac{1}{4} = 2$.
- $a^2 + b^2 = 7ab$, значит, $(a+b)^2 - 2ab = 7ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9ab \Rightarrow a+b = 3\sqrt{ab}$, следовательно, $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$. Поэтому $\lg \frac{a+b}{3} - 0,5(\lg a + \lg b) = \lg \sqrt{ab} - \frac{1}{2}\lg ab = \lg \sqrt{ab} - \lg \sqrt{ab} = 0$.
- Заметим, что $\sqrt{3}+1 = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, $\sqrt{6}-2 = \frac{2}{\sqrt{6}+2}$. Поэтому $\log_2(\sqrt{3}-1) + \log_2(\sqrt{6}+2) = \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \log_2 \frac{2}{\sqrt{6}+2} = 1 - \log_2(\sqrt{3}+1) + 1 - \log_2(\sqrt{6}-2) = 2 - k$.
- $\log_4 18 = \frac{1}{2}(1 + 2\log_2 3)$. Достаточно доказать, что $\log_2 3$ — иррациональное число. Докажем от противного. Предположим, что $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ — рациональное число, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, m и n — взаимно простые числа. Тогда $2^{\frac{m}{n}} = 3 \Leftrightarrow 2^m = 3^n$. Это равенство не может быть верно ни при каких m и $n \in \mathbb{N}$, так как четное число не может быть равно нечетному. Значит, $\log_2 3$ — иррационально и $\log_4 18$ — иррационально.

Вариант 2

- $\log_6 \frac{x^2}{6} - 2\log_6 6x^6 = 2\log_6 |x| - 1 - 12\log_6 |x| - 2 = -10\log_6 |x| - 3$ (рис. 190).
- $-\lg \lg \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}} = -\lg(\frac{1}{100}\lg 10) = -\lg \frac{1}{100} = 2$.

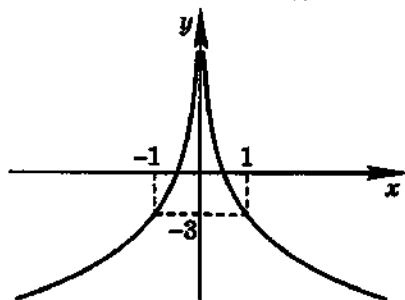


Рис. 189

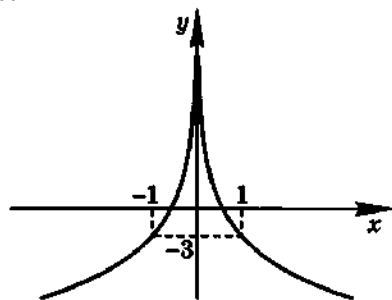


Рис. 190

3. Доказательство аналогично вар. 1.
 4. Значение выражения равно $2 - k$.
 5. $\log_{16} 36 = \frac{1}{2} \log_2 6 = \frac{1}{2} (1 + \log_2 3)$. Как уже доказали в вар. 1, $\log_2 3$ — иррациональное число. Значит, $\log_{16} 36$ — иррациональное число.

Задание 10.2. Переход к другому основанию

Вариант 1

1. $2 - \log_a(a^4 - b^4) + 2 \log_a(a - b) - \log_{a^{-1}}(a + b) + 0.5 \log_{\sqrt{a}}(a^2 + b^2) =$
 $= 2 - \log_a(a^4 - b^4) + \log_a(a - b) + \log_a(a + b) + \log_a(a^2 + b^2) =$
 $= 2 - \log_a(a^4 - b^4) + \log_a(a^2 - b^2) + \log_a(a^2 + b^2) = 2 - \log_a(a^4 - b^4) +$
 $+ \log_a(a^4 - b^4) = 2$. Значит, $\log_a y = 2$. y от b не зависит.
 2. а) Перейдем к основанию 2, и тогда исходное выражение равно

$$\frac{\frac{1}{\log_2 3} \log_2 x + \frac{\log_2^2 x}{\log_2 3 \log_2 5} + \frac{\log_2^2 x}{\log_2 5}}{\log_2^2 x} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 30} = \frac{\log_2 5 + 1 + \log_2 8}{\log_2 30} = \frac{\log_2 15 + 1}{\log_2 15 + 1} = 1.$$

б) Результат пункта (а) можно обобщить следующим образом:

$$\frac{\log_m x \log_n x + \log_l x \log_n x + \log_m x \log_l x}{\log_m x \log_n x \log_l x} \log_{mnl} x = 1.$$

Перейдем к основанию n , тогда

$$\frac{\frac{\log_n^2 x}{\log_n m} + \frac{\log_n^2 x}{\log_n l} + \frac{\log_n^2 x}{\log_n m \log_n l}}{\frac{\log_n^2 x}{\log_n m \log_n l}} \cdot \frac{\log_n x}{\log_n mnl} = \frac{\log_n l + \log_n m + 1}{\log_n mnl} = \frac{\log_n ml + \log_n n}{\log_n mnl} = \frac{\log_n mnl}{\log_n mnl} = 1.$$

3. $\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3}$, $\log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 = \frac{3 \log_2 3}{\log_2 12} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3} = a$.
 Откуда $\log_2 3 = \frac{2a}{3-a}$. Значит, искомый логарифм равен $\frac{12-4a}{3+a}$. При этом $a \neq -3$, так как $a = \log_{12} 27 > 0$.
 4. Перейдем к десятичным логарифмам, тогда

$$\log_{20} 80 = \frac{\lg 80}{\lg 20} = \frac{1 + \lg 8}{1 + \lg 2} = \frac{1 + 2 \lg 2}{1 + \lg 2} = 2 - \frac{1}{1 + \lg 2}, \log_{80} 640 = \frac{1 + 2 \lg 8}{1 + \lg 8} = 2 - \frac{1}{1 + \lg 8},$$

так как $\lg 8 > \lg 2$, то $\frac{1}{1 + \lg 2} > \frac{1}{1 + \lg 8}$, значит, второе число больше.

5. Перейдем к основанию 5, тогда левая часть неравенства равна $\frac{1}{\log_5 3} + \log_5 4$. Так как $\log_5 4 > \log_5 3$, то $\frac{1}{\log_5 3} + \log_5 4 > \frac{1}{\log_5 3} + \log_5 3 > 2$.
 В последнем неравенстве использовано свойство суммы положительных взаимно обратных чисел. Исходное неравенство неверно.

Вариант 2

1. Не зависит. См. вар. 1.
 2. а) 1; б) см. вар. 1.

$$3. \log_6 16 = 4 \log_6 2 = 4 \frac{\log_2 2}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3} = a, \quad \log_{12} 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 12} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3},$$

$$\log_2 3 = \frac{4-a}{a}, \text{ поэтому } \log_{12} 27 = \frac{12-3a}{2a+4-a} = \frac{12-3a}{a+4}, \text{ при этом } a \neq -4.$$

$$4. \log_{15} 16 = \log_{15} (4 \cdot 15) = \log_{15} 4 + 1, \quad \log_{60} 480 = \log_{60} (60 \cdot 8) = \log_{60} 8 + 1.$$

Достаточно сравнить $\log_{15} 4$ и $\log_{60} 8$. Рассмотрим

$$\log_{15} 4 - \log_{60} 8 = 2 \log_{15} 2 - \frac{3 \log_{15} 2}{1 + 2 \log_{15} 2} = \frac{2 \log_{15} 2 + 4 \log_{15}^2 2 - 3 \log_{15} 2}{1 + 2 \log_{15} 2} =$$

$$= \frac{\log_{15} 2 (4 \log_{15} 2 - 1)}{1 + 2 \log_{15} 2} = \frac{\log_{15} 2 (\log_{15} 16 - 1)}{1 + 2 \log_{15} 2}.$$

Так как $\log_{15} 2 > 0$ и $\log_{15} 16 > 1$, последнее выражение положительно, значит, $\log_{15} 4 > \log_{60} 8$, откуда следует, что $\log_{15} 60 > \log_{60} 480$.

$$5. \text{ Нет, неверно. Действительно,}$$

$$(\log_7 5)^{-1} + (\log_6 7)^{-1} = \frac{1}{\log_7 5} + \frac{1}{\log_6 7} = \frac{1}{\log_7 5} + \log_7 6 > \frac{1}{\log_7 5} + \log_7 5 > 2,$$

так как сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2.

Задание 10.3. Действия со степенями

Вариант 1

$$1. \text{ Нетрудно преобразовать исходное выражение}$$

$$6^{2 \log_6 5} + 10^{-\log_2 1} - 3^{\log_6 36} + \sqrt{2}^{2 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}} = 6^{\log_6 25} + \frac{10}{10^{\log_2 2}} - 3^{\log_3 6} + 2^{\log_2 3} =$$

$$= 25 + \frac{10}{2} - 6 + 3 = 27.$$

$$2. \text{ Исходное выражение можно записать в виде } b^{\frac{1}{3} \lg a} \cdot a^{\frac{1}{3} \lg b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{3}}.$$

$$3. \text{ а) Покажем, что}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Leftrightarrow \log_b (a^{\log_b c}) = \log_b (c^{\log_b a}) \Leftrightarrow \log_b c \cdot \log_b a = \log_b a \cdot \log_b c.$$

$$\text{Тогда } \sqrt{2}^{\log_3 5} = (2^{\log_3 5})^{\frac{1}{2}} = (5^{\log_3 2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}^{\log_3 2}. \text{ Значит, исходные выражения равны.}$$

$$\text{б) Обобщение следующее: } \sqrt[n]{a}^{\log_b c} = \sqrt[n]{c}^{\log_b a}.$$

$$4. \text{ Исходное неравенство равносильно следующему: } \frac{\log_5 (\log_5 x)}{\log_5 6} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (\log_5 x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x < 1, \\ \log_5 x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5. \text{ Значит, } x \in N: x = 2, x = 3, x = 4.$$

$$5. \text{ а) Представим числа в виде}$$

$$(2 \cdot 101)^{3 \cdot 101} \text{ и } (3 \cdot 101)^{2 \cdot 101} \Leftrightarrow 2^{3 \cdot 101} \cdot 101^{303} \cdot 101^{101} \text{ и } 3^{2 \cdot 101} \cdot 101^{202} \cdot 101^{101},$$

следовательно, можно сравнить числа

$$2^{3 \cdot 101} \cdot 101^{101} \text{ и } 3^{2 \cdot 101} \Leftrightarrow 808^{101} \text{ и } 9^{101}.$$

$$\text{Ясно, что } 808^{101} > 9^{101}. \text{ Значит, число } 202^{303} > 303^{202}.$$

$$\text{б) Сделаем обобщение. Пусть число } x = \overline{nop} \text{ — трехзначное число:}$$

$$\overline{nop} = 100n + 10p + r, \quad y = (n+1)100 + (p+1)0 + r, \text{ где } 1 \leq n \leq 8. \text{ Тогда } x^y > y^x.$$

Действительно, $x^y = (n \cdot 101)^{(n+1) \cdot 101}, \quad y^x = ((n+1) \cdot 101)^{n \cdot 101}.$ Для срав-

нения исходных чисел достаточно сравнить $t = (n \cdot 101)^{n+1}$ и $z = (101 \cdot (n+1))^n$. $t = n^{n+1} \cdot 101^{n+1}$, $z = 101^n \cdot (n+1)^n$, далее можно сравнить $n^{n+1} \cdot 101$ и $(n+1)^n$, $n \cdot 101$ и $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; так как для $1 \leq n \leq 8$ $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$, то $101n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ и, значит, $x^y > y^x$.

Вариант 2

1. Выражение можно записать в виде

$$7^{\log_7 25} + 10 \cdot 10^{-\log_3} - 4^{\log_{16} 49} + \sqrt{3}^{2 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}} = 25 + \frac{10}{10^{\log_3}} - 4^{\log_4 7} + 3^{\log_3 5} = 25 + \frac{10}{3} - 7 + 5 = 26\frac{1}{3}.$$

2. $(ab)^{\frac{1}{2}}$.

3. а) равны, см. вар. 1.

$$б) \sqrt{a^{\log_b c}} = \sqrt{c^{\log_b a}}.$$

4. $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$.

5. а) В вар. 1 доказано, что

$$202^{303} > 303^{202} \Leftrightarrow 202 > 303^{\frac{202}{303}} \Leftrightarrow 202^{\frac{1}{202}} > 303^{\frac{1}{303}} \Leftrightarrow \sqrt[202]{202} > \sqrt[303]{303}.$$

- б) $x^{\frac{1}{x}} > y^{\frac{1}{y}}$, где x и y см. в вар. 1.

Задание 10.4. Производная логарифмической функции

1. Искомые точки можно определить из системы $\begin{cases} \sin x - \cos x > 0, \\ f'(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0, \\ \sin x - \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Область определения функции: $y \in (0; 1)$. В области определения функция имеет производную, поэтому в промежутках убывания производная должна быть отрицательной.

$$g'(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{(1-y^2)^3}} \right) = \frac{1}{y} + \frac{y}{1-y^2} > 0.$$

Значит, функция не имеет промежутков убывания.

3. Область определения функции найдем из системы:

$$\begin{cases} z^2 - 8z + 15 > 0, \\ z - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 5, \\ z < 3, \\ z > 1 \end{cases} \Leftrightarrow z \in (1; 3) \cup (5; +\infty).$$

В точке $z = 4$ функция не определена, поэтому производной не существует.

4. Исходное неравенство равносильно $1 - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0$. В точке $x = 1$ оно верно, левая и правая части равны нулю. Вычислим производную

$\left(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right)' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$. Производная имеет экстремум в точке $x=1$. Это точка максимума, и значение функции в этой точке равно нулю. Значит, в точках $0 < x < 1$ и $x > 1$ значение функции меньше нуля. $1 - \frac{1}{x} - \ln x < 0$. Значит, $1 - \frac{1}{x} < \ln x$, и неравенство верно при $x > 0$.

5. $\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+1-1)^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. Тогда

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-1) dx + \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C \text{ при } x > -1.$$

Вариант 2

1. Искомые точки можно определить из системы

$$\begin{cases} \sin x + \cos x > 0, \\ f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x > 0, \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Нет промежутков возрастания.

3. Область определения: $z > 6$, поэтому $h'(5)$ не существует.

4. Верно. В точке $x=1$ функция $\ln x - x + 1$ принимает наибольшее значение, равное нулю. Это следует из равенства нулю производной $(\ln x - x + 1)' = \frac{1}{x} - 1$ в точке $x=1$.

5. $\frac{x^2}{x-1} = \frac{(x-1+1)^2}{x-1} = x - 1 + 2 + \frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) + C \text{ при } x > 1.$$

Задание 10.5. Свойства логарифмических функций

Вариант 1

1. Область определения удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \sin \pi x \geq 1, \\ 0 < \sec x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \pi x \geq 1, \\ \frac{1}{\cos \pi x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \pi x = 1, \\ \cos \pi x = 1. \end{cases}$$

Последняя система несовместна, и поэтому область определения — пустое множество.

2. Найдем область значений функции $z(y) = \frac{1+y^2}{1+y+y^2} = \frac{1}{1+\frac{y}{1+y^2}}$. Рассмотрим

$\frac{y}{1+y^2}$ и обратную величину $\frac{1+y^2}{y} = \frac{1}{y} + y$. $\frac{1}{y} + y \geq 2$ при $y > 0$ и

$\frac{1}{y} + y \leq -2$ при $y < 0$. Значит, $-\frac{1}{2} \leq \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{1}{2}$, поэтому $\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3} \leq z(y) \leq 2$. Тогда область значений функции $g(y)$ есть

$$[\log_{0,5} 2; \log_{0,5} \frac{2}{3}] = [-1; \log_2 \frac{3}{2}].$$

3. Область определения $h(z)$: $z + \sqrt{1+z^2} > 0 \Leftrightarrow z \in (-\infty; +\infty)$. Для любого z $h(-z) = \lg(-z + \sqrt{1+z^2}) = \lg \frac{1}{\sqrt{1+z^2} + z} = -\lg(z + \sqrt{1+z^2}) = -h(z)$. Функция $h(z)$ — нечетная.
4. $\log_3 75 < \log_3 81 = 4$, $\log_2 22 > \log_2 16 = 4$. Значит, $\log_3 75 < \log_2 22$, и выражение имеет знак «минус».
5. На промежутке $(0; \frac{\pi}{4})$: $0 < \sin x < 1$ и $0 < \operatorname{tg} x < 1$. $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x = \log_{\sin x} \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \log_{\sin x} \cos x$. Так как $0 < \cos x < 1$ и $\cos x > \sin x$, то $0 < 1 - \log_{\sin x} \cos x < 1$. $\log_{\operatorname{tg} x} \sin x = \frac{1}{\log_{\sin x} \operatorname{tg} x} > 1$. Первое выражение меньше.

Вариант 2

1. Область определения — пустое множество.
2. Заметим, что искомая функция отличается от функции вар. 1 только знаком. Поэтому можно использовать полученный в вар. 1 результат. Область значений функции $g(y) \in [-\log_2 \frac{3}{2}; 1]$.
3. Область определения функции $\frac{1+z}{1-z} > 0 \Leftrightarrow z \in (-1; 1)$ симметрична относительно нуля. Для любого $z \in (-1; 1)$ верно $h(-z) = \lg \frac{1-z}{1+z} = -\lg \frac{1+z}{1-z} = -h(z)$. Значит, функция $h(z)$ — нечетная.
4. Так как $\log_4 60 < 3$, а $\log_3 30 > 3$, $\log_4 60 - \log_3 30 < 0$. Знак «минус».
5. $\log_{\cos x} \operatorname{ctg} x = \log_{\cos x} \frac{\cos x}{\sin x} = 1 - \log_{\cos x} \sin x$. Так как для $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ $0 < \cos x < \sin x < 1$, то $0 < \log_{\cos x} \sin x < 1$, значит, $0 < \log_{\cos x} \operatorname{ctg} x < 1$. Тогда $\log_{\operatorname{ctg} x} \cos x = \frac{1}{\log_{\cos x} \operatorname{ctg} x} > 1$. Значит, первое выражение меньше.

Задание 10.6. График логарифмической функции

Вариант 1

1. Рис. 191.

2. $\sqrt{(\log_{0.5}(x+1))^2} = |2 \log_5 |x+1||$ (рис. 192).

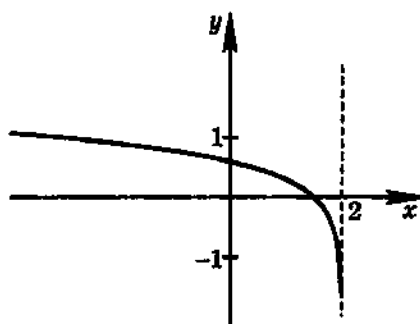


Рис. 191

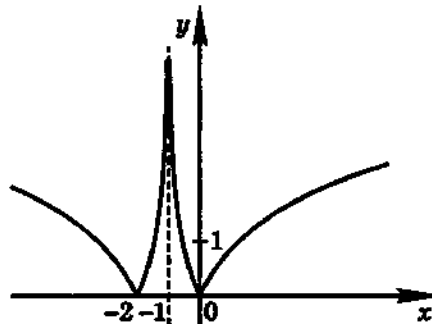


Рис. 192

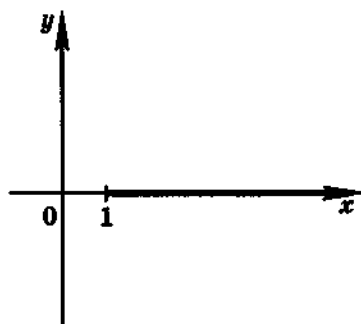


Рис. 193

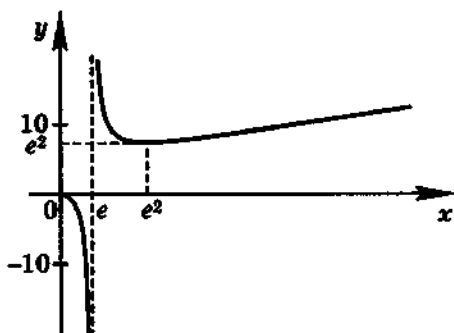


Рис. 194

3. Преобразуем исходную функцию:

$$\begin{aligned} y &= \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \log_1(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= \log_a(x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2) = \log_a 1 = 0 \text{ для } x \geq 1. \end{aligned}$$

Итак, $y(x) = 0$, $x \geq 1$ (рис. 193).

4. Область определения функции: $x \in (0; e) \cup (e; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x - 1} = 0$. Определим экстремальные точки:

$$y'(x) = \frac{1}{\ln x - 1} + x \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \frac{1}{\ln x - 1} - \frac{1}{(\ln x - 1)^2}, \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = e^2.$$

Точка $x = e^2$ — точка минимума, $y(e^2) = e^2$ (рис. 194).

5. $\log_{\sin x}(1 - \cos 2x) = \log_{\sin x} 2 \sin^2 x = 2 + \log_{\sin x} 2 = 2 + \frac{1}{\log_2 \sin x}$. Функция определена для $0 < \sin x < 1 \Leftrightarrow x \in (2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$.

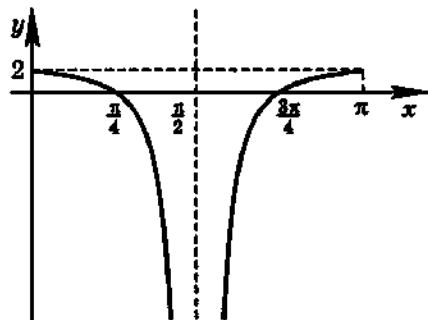


Рис. 195

Нарисуем график для $x \in [0; \pi]$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \log_2(\sin x) \rightarrow -\infty$, поэтому

$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\sin x}(1 - \cos 2x) \rightarrow 2$,

$\lim_{x \rightarrow \pi} \log_{\sin x}(1 - \cos 2x) \rightarrow 2$

(рис. 195).

Нули функции из уравнения

$\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Рис. 196.

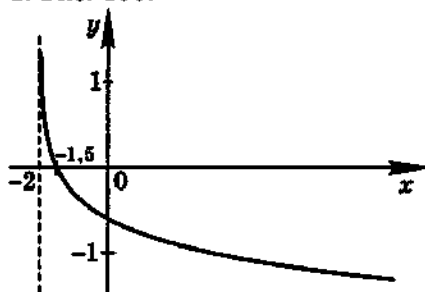


Рис. 196

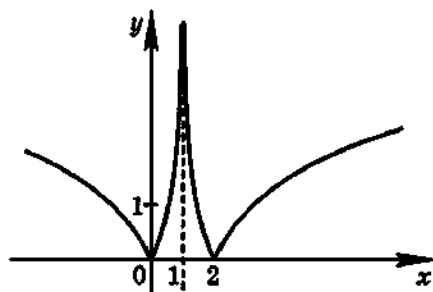


Рис. 197

2. $\sqrt{(\log_{0.5}(x-1))^2} = |2\log_5|x-1||$. График функции имеет вертикальную асимптоту (рис. 197).

3. $y = -\log_a(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_{a^{-1}}(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\log_a(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\log_a 1 = 0$. Функцию можно записать так: $\begin{cases} y(x) = 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$ График приведен на рис. 198 (см. вар. 1).

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x + 1} = 0$. Из условия $y'(x) = 0$ определим экстремальные точки: $\frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Точка $x = 1$ является точкой минимума, $y(1) = 1$. Прямая $x = \frac{1}{e}$ — вертикальная асимптота (рис. 198).

5. $\log_{\cos x}(1 + \cos 2x) = \log_{\cos x} 2 \cos^2 x = 2 + \log_{\cos x} 2$. Область определения функции: $\begin{cases} 0 < \cos x < 1, \\ 1 + \cos 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \cos x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k) \cup (2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$ (рис. 199).

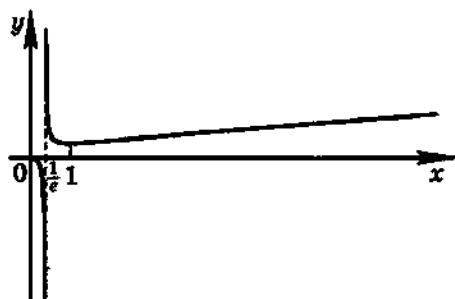


Рис. 198

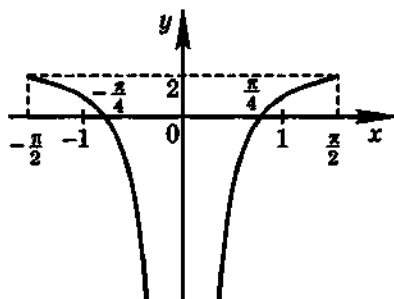


Рис. 199

Задание 10.7. Интегрирование и логарифмическая функция

Вариант 1

- $\int_1^{x^2} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_1^{x^2} = \ln x^2$, $\int_x^{2x} \frac{dp}{p} = \ln p \Big|_x^{2x} = \ln 2x - \ln x = \ln 2$. Тогда искомое равенство приобретает вид $\ln x^2 = \ln 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$. Итак, при $x = \sqrt{2}$ верно равенство.
- а) $F = \int \operatorname{ctg} t \, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin t} = \ln |\sin t| + C$.
 б) Искомая первообразная определяется из условия $\ln |\sin \frac{x}{2}| + C = 0$, то есть $C = 0$. Значит, первообразная имеет вид $F(x) = \ln |\sin t|$.
 в) График первообразной приведен на рис. 200.
- Сделаем замену: $z = \frac{1}{x}$, $dz = -\frac{1}{x^2} dx$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\ln|z + \sqrt{1+z^2}| = -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C.$$

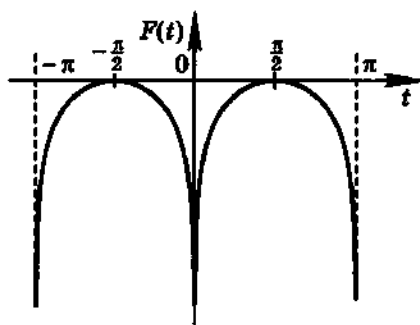


Рис. 200

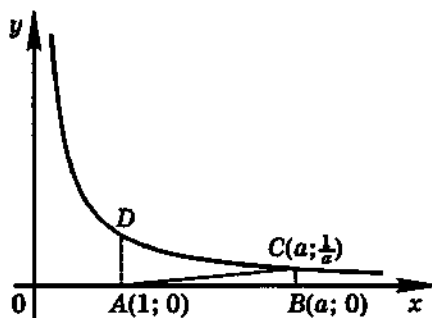


Рис. 201

- Площадь треугольника ABC $S_1 = \frac{a-1}{2a}$, площадь криволинейной трапеции $S = \int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln a$ (рис. 201). По условию $S_1 = \frac{1}{2}S \Rightarrow \frac{a-1}{2a} = \ln a$, тогда $\frac{1}{2} - \ln a = \frac{1}{2a}$. Равенство верно при $a = 1$. При $a > 1$ обе части равенства убывают, но с разной скоростью: $-\frac{1}{a}$ и $-\frac{1}{2a^2}$. Отсюда следует, что равенство не может быть верно при $a > 1$. Итак, нет таких a , при которых выполнено условие задачи.

- При $x \in [2; 3]$ $\ln x < 2$. Значит, $\int_2^3 \ln x \, dx < \int_2^3 2 \, dx = 2$.

Вариант 2

1. Исходное равенство равносильно следующему: $\ln x^2 = \ln 4x - \ln 2x$, то есть $\ln x^2 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Итак, условию удовлетворяет $x = \sqrt{2}$.

2. а) $\int \operatorname{tg} t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = - \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} = -\ln|\cos t| + C$.

б) $F(t) = -\ln|\cos t|$.

в) Искомый график приведен на рис. 202.

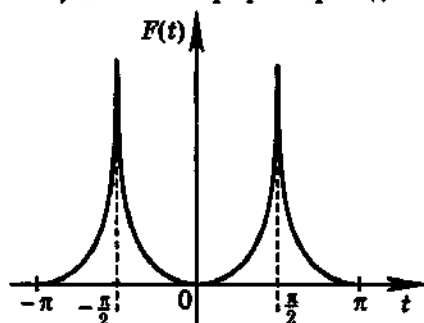


Рис. 202

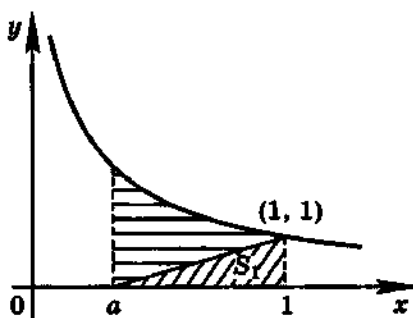


Рис. 203

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$, замена $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, тогда интеграл равен $2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = 2 \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + C = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C$.

4. $S_1 = \frac{1-a}{2}$, $S = \int_a^1 \frac{1}{x} dx = -\ln a = \ln \frac{1}{a}$ (рис. 203). По условию, $\frac{S}{2} = S_1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{1}{a} = \frac{1-a}{2}, \text{ то есть } \ln \frac{1}{a} = 1-a.$$

Последнее уравнение имеет корень $a=1$. На промежутке $a \in (0; 1)$ функции $\ln \frac{1}{a}$ и $1-a$ убывают:

$$\left(\ln \frac{1}{a}\right)' = -\frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a} < 0,$$

$$(1-a)' = -1 < 0,$$

причем $-\frac{1}{a} < -1$, значит, скорости убывания различные, и поэтому уравнение решений на промежутке $a \in (0; 1)$ не имеет (рис. 204).

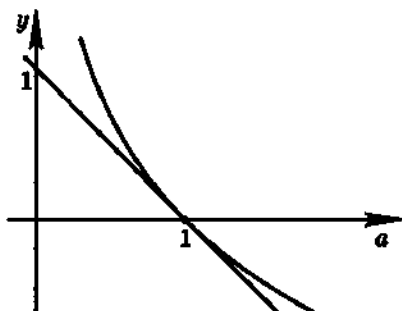


Рис. 204

5. При $x \in [4; 5]$ $\ln x < 2$, значит, $\int_4^5 \ln x \, dx < \int_4^5 2 \, dx = 2$.

Задание 10.8. Контрольное задание

Вариант 1

1. Исследуем функцию: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0$, корень функции $x = e$. Прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота. Определим экстремумы.

$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{2(\ln x - 1)}{\ln^3 x} \cdot \frac{1}{x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2(\ln x - 1)}{\ln x} = 0$, $\frac{2}{\ln x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$, следовательно, $x = e^2$ — точка максимума. $y(e^2) = \frac{1}{4}$ (рис. 205).

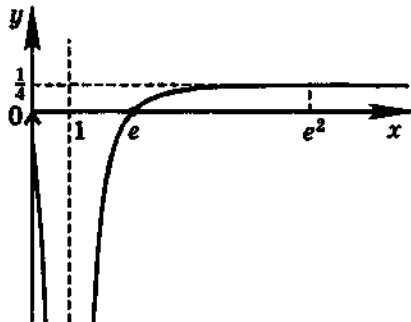


Рис. 205

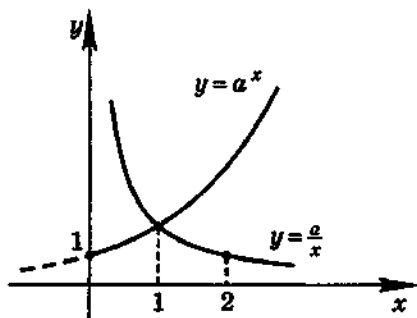


Рис. 206

2. а) Площадь криволинейной трапеции (рис. 206):

$$S = \int_0^1 a^x dx + \int_1^2 \frac{x}{a} dx = \left. \frac{a^x}{\ln a} \right|_0^1 + a \ln 2 = \frac{a-1}{\ln a} + a \ln 2.$$

Рассмотрим, в каких границах изменяется площадь.

$$S(a) = \frac{a-1}{\ln a} + a \ln 2. \quad \lim_{a \rightarrow 1} \left(\frac{a-1}{\ln a} + a \ln 2 \right) = \ln 2, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1}{\ln a} + a \ln 2 \right) = \infty.$$

Итак, $S(a) \in (\ln 2; +\infty)$.

- б) Левая часть площади при $a = 2$ равна $\frac{1}{\ln 2}$, правая часть площади — $2 \ln 2$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln 2} - 2 \ln 2 &= \frac{1}{\ln 2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 \ln 2 = \frac{1 - \sqrt{2} \ln 2 + (\sqrt{2} - 2 \ln 2) \ln 2}{\ln 2} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{2} \ln 2 + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2} \ln 2) \ln 2}{\ln 2} = \frac{(1 - \sqrt{2} \ln 2)(1 - \sqrt{2} \ln 2)}{\ln 2} = \frac{(1 - \sqrt{2} \ln 2)^2}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Так как $\ln 2 > 0$, то $\frac{1}{\ln 2} - 2 \ln 2 > 0$, и, значит, левая часть площади больше правой.

3. Исходное неравенство равносильно следующему (переход к основанию y):

$$\begin{aligned} \log_y \log_y x < \log_x \frac{1}{\log_y x} &\Leftrightarrow \log_y \log_y x < \frac{\log_y \frac{1}{\log_y x}}{\log_y x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_y \log_y x - \log_y \left(\frac{1}{\log_y x} \right) \cdot \frac{1}{\log_y x} < 0 \Leftrightarrow \log_y \log_y x + \log_y (\log_y x) \cdot \frac{1}{\log_y x} < 0, \\ \text{то есть } \log_y \log_y x \cdot \frac{\log_y x + 1}{\log_y x} &< 0. \end{aligned}$$

Границы множества точек определяются из совокупности условий (рис. 207)

$$\begin{cases} \log_y \log_y x = 0, \\ \log_y x + 1 = 0, \\ \log_y x = 0, \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ y = \frac{1}{x}, \\ x = 1, \\ y = 1, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

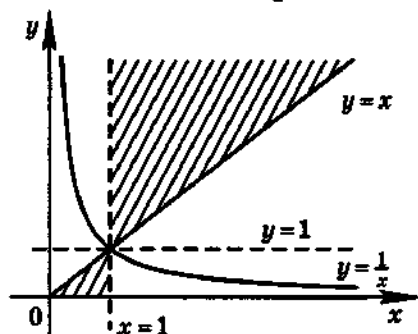


Рис. 207

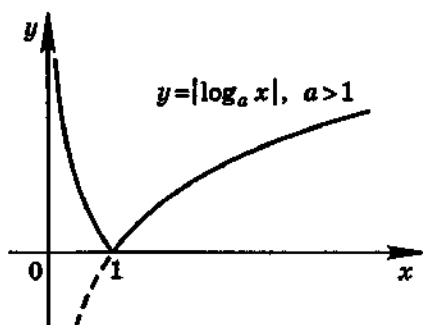


Рис. 208

4. При $a = 0$ левая часть равенства равна правой части. Найдем производные левой и правой части. Это 3^a и 2^a , так как при $a > 0$ $3^a > 2^a$, левая часть неравенства больше правой.
5. График $y = |\log_a x|$ при $a > 1$ и $x > 1$ совпадает с графиком $y_1 = \log_a x$; при $0 < x < 1$ совпадает с графиком $y_2 = \log_{\frac{1}{a}} x$ (рис. 208). Вычислим углы наклона касательных в точке $x = 1$ к этим графикам:

$$y'_1 = \frac{1}{x \ln a}, \quad y'_2 = \frac{1}{x \ln \frac{1}{a}} = -\frac{1}{x \ln a}.$$

Для того чтобы в точке $x = 1$ касательные пересекались под прямым углом, необходимо и достаточно, чтобы $y'_1 = -\frac{1}{y'_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln a} = \ln a \Leftrightarrow a = e$.

Итак, при $a = e$ ветви графика $y = |\ln x|$ в точке $x = 1$ пересекаются под прямым углом.

6. Уравнение касательной в точке x_0 таково: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Так как отрезок касательной делится пополам в точке пересечения с осью y и точка A имеет абсциссу x_0 , абсцисса точки пересечения с осью x равна $-x_0$; то есть точка $(-x_0; 0)$ лежит на касательной. $f(x_0) - 2x_0 f'(x_0) = 0$, откуда имеем

$$\frac{df}{f} = \frac{dx_0}{2x_0} \Rightarrow \ln f = \frac{1}{2} \ln x_0 + C, \ln f = \ln(C_1 \sqrt{x_0}) \Rightarrow f = C_1 \sqrt{x_0}.$$

Из условия прохождения графика через точку $A(1; 2)$: $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$ (рис. 209).

Вариант 2

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x + 1}{\ln^2 x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{\ln^2 x} = 0$. Прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота. Определим экстремумы из условия $y' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x + 1}{\ln^2 x} \right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x} \right)' = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x \ln^2 x} - \frac{2}{x \ln^3 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$, $y(e^{-2}) = -\frac{1}{4}$ (рис. 210).

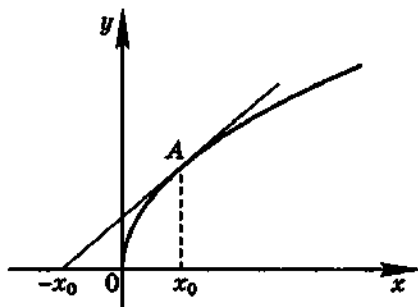


Рис. 209

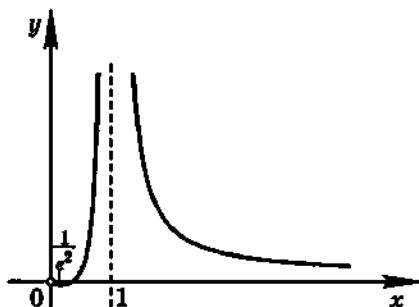


Рис. 210

2. а) Если заменить x на $-x$, задача сводится к вар. 1. Площадь меняется от $1 + \ln 2$ до ∞ .
б) Площадь справа от прямой $x = 1$ больше.
3. Аналогично вар. 1, исходное неравенство можно записать так:

$$\log_y \log_y x \cdot \frac{\log_y x + 1}{\log_y x} > 0.$$

Границы множества точек задаются уравнениями: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$

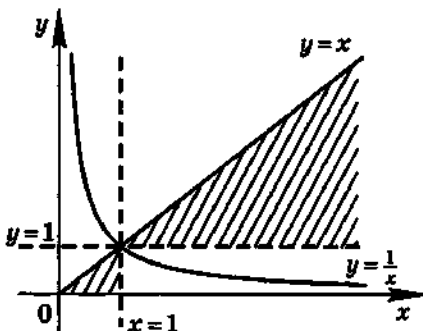


Рис. 211

(рис. 211).

4. Нет, неверно. Действительно, при $a=0$ выражения равны. Производная левой части при $a < 0$ $3^a < 2^a$ меньше производной правой части. Это значит, что при $a < 0$ левая часть больше.
5. $a = \frac{1}{e}$. При $a < 1$ график $y = |\log_a x|$ совпадает с графиком $y = |\log_{\frac{1}{a}} x|$ и произведение производных в точке $x=1$ равно -1 . Поэтому ветви графика перпендикулярны.
6. $y(x) = -2\sqrt{x}$, $x > 0$. См. вар. 1.

Тема 11

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Задание 11.1. Показательные уравнения

Вариант 1

1. а) Применим ряд равносильных преобразований:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} - 3^{x^2} = \frac{1}{3} \cdot 3^{x^2} - 4 \cdot 2^{x^2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 2^{x^2} = \frac{4}{3} \cdot 3^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0.$$

Итак, уравнение имеет решение $x = \pm\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } 5 \cdot 25^{-\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{1-2\sin^2 x} &= 5^{2\sin x \cos x} \Leftrightarrow 25 \cdot 25^{-\sin^2 x} = 25^{\sin x \cos x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 25^{1-\sin^2 x} &= 25^{\sin x \cos x} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x = \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin x \cos x = 0, \\ \text{следовательно, } \begin{cases} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi l, \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

в) Исходное уравнение равносильно следующим:

$$\begin{aligned} 2^{8x} - 1 + 2^x - 2^{2x} &= 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^{2x} + 1 + 2^x) - 2^x(2^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^{2x} + 1) &= 0 \Leftrightarrow 2^x = 1, \text{ значит, корень } x = 0. \end{aligned}$$

2. Исходное условие равносильно совокупности

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ x^2 + y^2 \geq 16, \\ y - x > 0, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

Заметим, что равенство $y - x = 1$ — уравнение прямой, $y - x = 0$ — уравнение прямой, $x^2 + y^2 = 16$ — уравнение окружности с центром

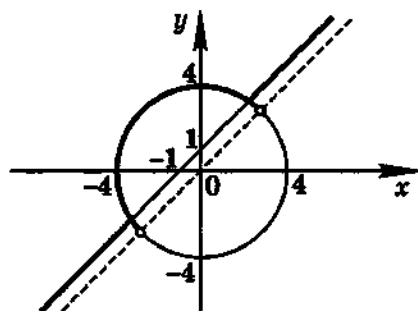


Рис. 208

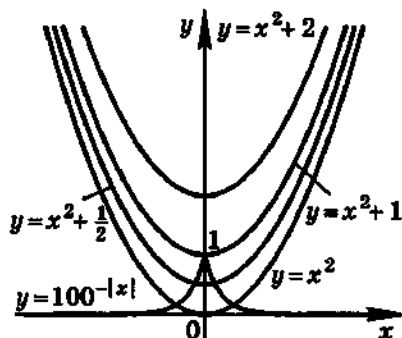


Рис. 209

$(0; 0)$ и радиусом $r = \sqrt{16} = 4$. Итак, исходное множество точек выглядит так (жирная линия) (рис. 208).

3. Нетрудно проверить, что если $x_0 > 0$ есть корень уравнения, то и число $-x_0$ есть корень уравнения. Также проверка показала, что $x = 0$ является корнем уравнения при $a = 1$. Значит, уравнение может при $a \neq 1$ иметь либо четное число корней, либо не иметь их. Исследуем уравнение при $x \geq 0$. Оно равносильно $100^{-x} - x^2 = a^2$, запишем его в виде $100^{-x} = x^2 + a^2$, левая часть уравнения от a не зависит и является показательной функцией $(\frac{1}{100})^x$, которая убывает при $x \geq 0$ от 1 до «почти» 0. Правая часть уравнения — квадратичная функция, возрастающая от a^2 до ∞ . Если $|a| = 1$, то уравнение имеет один корень $x = 0$. Если $|a| = 0$, уравнение имеет один положительный корень и один отрицательный корень (всего 2). Если $|a| > 1$, уравнение корней не имеет. На рис. 209 приведены графики. График числа корней см. в вар. 2.

Вариант 2

1. а) $x = -0,5$.
 б) $x = \pm \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
 в) $x = 0$.
2. Множество точек определяется из совокупности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 4, \\ x + y > 0. \end{cases}$$

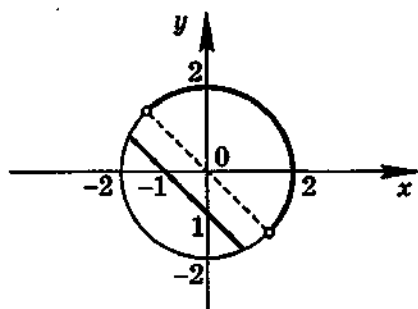


Рис. 210

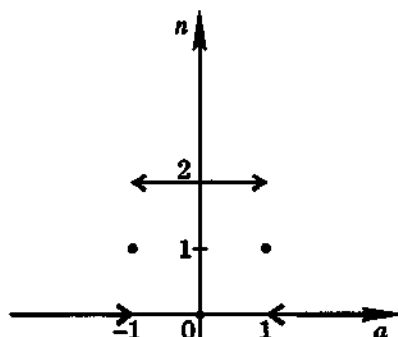


Рис. 211

На графике точки лежат на прямой и окружности, отмечены жирной линией (рис. 210).

3. Решение аналогично вар. 1. Ответ такой же. Приведем график зависимости числа корней от значений a (рис. 211). n — число корней.

Задание 11.2. Равносильность при решении показательных уравнений и неравенств

Вариант 1

$$1. \text{ а) } \sqrt{25^x - 1} = 5^x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 1 \geq 0, \\ 25^x - 1 = (5^x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2 \cdot 5^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 5^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

б) Исходное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 3^{t^2} - 3 \geq 0, \\ 3^{t^2} - 3 = 3^{t^2} - 2 \cdot 3^t - 3, \\ 3^{t^2} - 3 < 0, \\ -3^{t^2} + 3 = 3^{t^2} - 2 \cdot 3^t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 \geq 1, \\ 2 \cdot 3^t = 0, \\ t^2 < 1, \\ 3^{t^2} - 3^t - 3 = 0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, так как $3^t \neq 0$, вторая система не имеет решений, так как при $t^2 < 1$ $t^2 < t$ и $3^{t^2} - 3^t < 0$. Значит, исходное уравнение не имеет решений.

$$2. \text{ а) } (z^2 + z + 1) \sqrt{z^2 + 2z} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (z^2 + z + 1 - 1) \sqrt{z^2 + 2z} \leq 0, \\ z^2 + z + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^2+z)\sqrt{z^2+2z} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+z \leq 0, \\ z^2+2z \geq 0, \\ z^2+z \geq 0, \\ z^2+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq z \leq 0, \\ \begin{cases} z \leq -2, \\ z \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} z \geq 0, \\ z \leq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} z = -2, \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0, \\ z=-2. \end{cases}$$

б) $x^x > x^{x^2}$, область допустимых значений: $x > 0$, тогда верно $\log_2 x^x > \log_2 x^{x^2}$ или $x \log_2 x - x^2 \log_2 x > 0$, $x(1-x) \log_2 x > 0$. Рассмотрим $0 < x < 1$, при этом $\log_2 x < 0$, $x > 0$, $1-x > 0$, значит, выражение $x(1-x) \log_2 x < 0$, то есть нет решений при $0 < x < 1$. Рассмотрим $x > 1$. При этом $\log_2 x > 0$, $x > 0$, $1-x < 0$. Неравенство также не имеет решений при $x > 1$.

Итак, неравенство решений не имеет.

$$\begin{aligned} \text{в) } |4^x - 2^x| > 2^x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 2^x > 2^x - 1, \\ 4^x - 2^x < 1 - 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 > 0, \\ 4^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 1)^2 > 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Вариант 2

1. а) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - 6^x \geq 0, \\ 1 - 36^x = (1 - 6^x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 2 \cdot 36^x - 2 \cdot 6^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 36^x = 6^x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

б) Нет решений, см. вар. 1.

2. а) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (z^2 - z + 1 - 1)\sqrt{z^2 - 2z} \geq 0, \\ z^2 - z + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (z^2 - z)\sqrt{z^2 - 2z} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - z \leq 0, \\ z^2 - 2z = 0, \\ z^2 - z \geq 0, \\ z^2 - 2z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty).$$

б) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \log_2 x < x^2 \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (1-x) \log_2 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

в) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9^x - 3^x < 1 - 3^x, \\ 9^x - 3^x > 3^x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x < 1, \\ 9^x - 2 \cdot 3^x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ (3^x - 1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

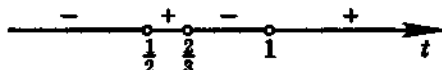
Задание 11.3. Показательные неравенства

Вариант 1

1. Пусть $2^{x-1} = t$, тогда $2^x = 2t$, и неравенство примет вид

$$\frac{1}{2t-1} > \frac{1}{1-t} \Leftrightarrow \frac{2-3t}{(2t-1)(1-t)} > 0.$$

Неравенство можно решить методом интервалов.



$t \in (\frac{1}{2}; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$. Тогда $2^{x-1} \in (\frac{1}{2}; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$, и решение исходного неравенства $x \in (0; \log_2 \frac{4}{3}) \cup (1; +\infty)$.

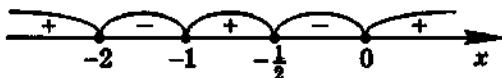
2. Исходное неравенство равносильно $\sqrt{9^x - 9 \cdot 3^x} > 3^x - 9$. Пусть $t = 3^x$,

$$\text{тогда } \sqrt{t^2 - 9t} > t - 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 9, \\ t(t-9) > (t-9)^2, \\ t < 9, \\ t(t-9) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 9, \\ t \leq 0. \end{cases}$$

Тогда x удовлетворяет неравенству $\begin{cases} 3^x > 9, \\ 3^x \leq 0, \end{cases}$ откуда $x > 2$ — решение неравенства.

3. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0, \\ (x^2 + x + 1 - 1)(\frac{x+5}{x+2} - 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x^2 + x)(-2x - 1)}{x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(1+x)(2x+1)}{(x+2)} \leq 0.$$



Решение: $x \in (-2; 1] \cup [-\frac{1}{2}; 0]$.

4. Исходное неравенство равносильно следующему:

$$2^{\sin^2 x} < 2^{-\cos^2 x + \sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\cos^2 x} < 1,$$

так как $\cos^2 x \geq 0$, это неравенство не имеет решений.

5. Покажем, что правая часть неравенства не меньше $\frac{1}{2}$. Действительно, $0,5y^2 - 5y + 13 = \frac{1}{2}(y-5)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Левая часть неравенства не боль-

ше $\frac{1}{2}$. Рассмотрим неравенство $(5^x - 5)^2 \geq 0$, верное для всех x , оно равносильно $5^{2x} + 25 \geq 10 \cdot 5^x$, откуда имеем $\frac{5 \cdot 5^x}{5^{2x} + 25} \leq \frac{1}{2}$. Значит, действительно, левая часть исходного неравенства не превосходит $\frac{1}{2}$. Поэтому исходное неравенство верно при $\frac{5 \cdot 5^x}{5^{2x} + 25} = \frac{1}{2}$ и $0,5y^2 - 5y + 13 = \frac{1}{2}$, что возможно при $x = 1, y = 5$.

Вариант 2

1. Если обозначить $t = 3^x$, неравенство для t будет иметь вид $\frac{2t-3}{(t-1)(t-1)} < 0$.

Тогда $t \in (1; \frac{3}{2}) \cup (3; +\infty)$. Для x неравенство имеет вид $\begin{cases} 1 < 3^x < \frac{3}{2}, \\ 3^x > 3, \end{cases}$

откуда получаем решение $x \in (0; \log_3 \frac{3}{2}) \cup (1; +\infty)$.

2. $x \in (2; +\infty)$. Решение аналогично вар. 1.

3. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 0, \\ (x^2 - x + 1 - 1)(\frac{x+5}{x+2} - 3) \geq 0, \end{cases}$$

решение которой есть $x \in (-2; -\frac{1}{2}) \cup [0; 1]$.

4. $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

5. Решение: $x = 1, y = -5$. См. вар. 1.

Задание 11.4. Системы уравнений

Вариант 1

1. а) Первое уравнение системы можно записать как $y^{(x-2)(x-6)} = 1$.

Решение этого уравнения: $\begin{cases} y = 1, x \in \mathbb{R}, \\ y > 0, \begin{cases} x = 2, \\ x = 6. \end{cases} \end{cases}$ Учтем второе уравнение

$x - y = 4$, тогда решение: $\begin{cases} y = 1, x = 5, \\ y = 2, x = 6. \end{cases}$

б) Из второго уравнения имеем $z = y^{\frac{1}{y}}$, подставим в первое уравнение и получим $y^{\frac{x}{y}} = x$, в третье и получим $y^{\frac{x}{y}} = y^y$. Значит, система

примет вид $\begin{cases} y^{\frac{x}{y}} = x, \\ y^{\frac{x}{y}} = y^y, \end{cases}$ из второго уравнения следует, что либо $y = 1$,

либо при $y > 0$ $\frac{x}{y} = y$, то есть $\begin{cases} y=1, \\ y>0, \frac{x}{y}=y. \end{cases}$ Если $y=1$, то $x=z=1$. Если $x=y^2$, то $y^y=y^2$, откуда $y=2$, $z=\sqrt{2}$, $x=4$. Решения: $(1; 1; 1)$, $(4; 2; \sqrt{2})$.

2. Известно, что $(x-y)^2 \geq 0$, откуда получим, что $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Тогда $5^{x^2+2y^2} = 5^{x^2+y^2} \cdot 5^{y^2} \geq 5^{2xy} \cdot 5^{y^2} = 25^{xy} \cdot 5^{y^2} \geq 25^{xy}$. Так как $x^2 + 2y^2 \geq 0$, то $5^{x^2+2y^2} \geq 1$, тогда для возможных решений $(x; y)$ правая часть уравнения $17^{xy} \geq 1$. Значит, $xy \geq 0$. Но при $xy \geq 0$ $25^{xy} \geq 17^{xy}$. И поэтому $5^{x^2+2y^2} \geq 17^{xy}$. Равенство возможно только при $x=y=0$. При этом первое уравнение примет вид $(1+0)^0 + (1+0)^0 = a$, то есть единственное решение возможно при $a=2$.

Вариант 2

1. а) Первому уравнению системы удовлетворяют все y при $x=1$ и все $x > 0$ при $y=5$ или $y=2$. Тогда, учитывая второе уравнение, имеем

$$\begin{cases} x=y=2, \\ x=1, y=3. \end{cases}$$

б) Из второго уравнения имеем $x = z^{\frac{1}{z}}$, подставим в первое и третье

уравнения, получим $\begin{cases} z^{\frac{y}{z}} = y, \\ z^{\frac{y}{z}} = z^z, \end{cases}$ второе уравнение имеет решение

$\begin{cases} z=1, \\ z>0, \frac{y}{z}=z, \end{cases}$ из которого имеем $x=y=z=1$ и $z^z=z^2$, то есть $z=2$. При

$z=2$ $y=4$, $x=\sqrt{2}$. Итак, решения: $\begin{cases} x=y=z=1, \\ x=\sqrt{2}, y=4, z=2. \end{cases}$

2. Решение аналогично вар. 1. Система имеет единственное решение при $a=2$.

Задание 11.5. Контрольное задание

Вариант 1

1. Исходное уравнение можно записать в виде

$$5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 5^2 \cdot 2 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 2 \cdot 2^{-\frac{2x-1}{x+1}} \Leftrightarrow 5^{x-2} = 2^{\frac{2-x}{x+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} = 2^{\frac{2-x}{x+1}} \Leftrightarrow \left(5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{2-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ 5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=-1 - \log_5 2, \end{cases}$$

положительный корень исходного уравнения — $x=2$.

2. Запишем равносильные неравенства:

$$\begin{aligned}
 4y^2 + 3 \cdot 3^{\sqrt{y}} + y \cdot 3^{\sqrt{y}} - 2y^2 \cdot 3^{\sqrt{y}} - 2y - 6 < 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4y^2 - 2y^2 \cdot 3^{\sqrt{y}} + 3 \cdot 3^{\sqrt{y}} - 6 + y \cdot 3^{\sqrt{y}} - 2y < 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -2y^2(3^{\sqrt{y}} - 2) + 3(3^{\sqrt{y}} - 2) + y(3^{\sqrt{y}} - 2) < 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (3^{\sqrt{y}} - 2)(-2y^2 + y + 3) < 0 &\Leftrightarrow 2(3^{\sqrt{y}} - 2)(y + 1)(y - \frac{3}{2}) > 0.
 \end{aligned}$$

Так как $y \geq 0$, то $y + 1 \geq 0$, значит, достаточно решить неравенство $(3^{\sqrt{y}} - 2)(y - \frac{3}{2}) > 0$. Откуда имеем решение: $\begin{cases} y > \frac{3}{2}, \\ 0 \leq y < (\log_3 2)^2. \end{cases}$

3. Из первого уравнения имеем $x = y^{\frac{1}{\sqrt{y}}}$, тогда из второго $y^{\sqrt{y}} = \left(y^{\frac{1}{\sqrt{y}}}\right)^4$.

Отсюда $\begin{cases} y = 1, \\ \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = 4, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$ Надо определить, на какой

прямой лежат две точки (1; 1) и (2; 4). Уравнение прямой имеет вид $Ax + By + 1 = 0$. Подставляя точки, определим A и B . Тогда $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$ или $y = 3x - 2$.

4. В системе координат построим графики левых и правых частей уравнений $y = a^x$ и $y = |x + 2| - |2x + 8|$ (рис. 212).

Левая часть уравнения принимает наибольшее значение при $x = -4$, равное 2. Левая часть уравнения положительна при $-6 < x < -\frac{10}{3}$. Так как правая часть уравнения не может быть меньше нуля, возможные корни в интервале $(-6; -\frac{10}{3})$. Область значений левой части уравнения при $x \in (-6; -\frac{10}{3})$

$y \in (0; 2)$, причем каждое значение $y \in (0; 2)$ принимается дважды. Рассмотрим область значений $y = a^x$ при $x \in (-6; -\frac{10}{3})$ при различных a . При $a > 1$ $0 < a^x < 1$ при любом $x < 0$. Это

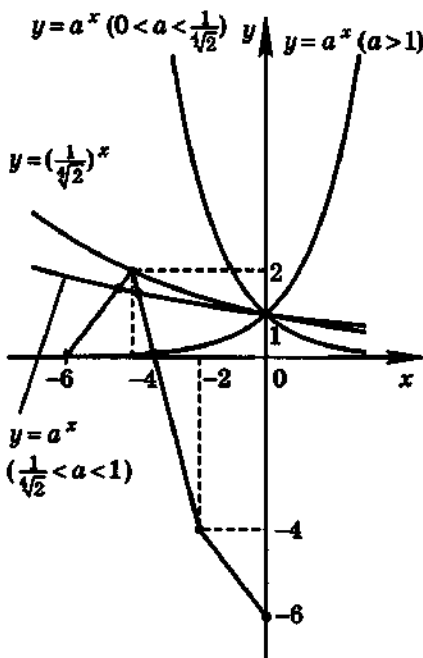


Рис. 212

означает, что на промежутке $(-6; -\frac{10}{3})$ имеются две точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения, и уравнение имеет два корня. При $0 < a < 1$ и $x \in (-6; -\frac{10}{3})$ $y = a^x \in (a^{-\frac{10}{3}}; a^{-6})$. Рассмотрим подробнее $x \in (-6; -\frac{10}{3})$. При $x \in (-6; -4)$ $y = a^x \in [a^{-4}; a^{-6}]$; при $x \in [-4; -\frac{10}{3})$ $y = a^x \in (a^{-\frac{10}{3}}; a^{-4}]$. Так как левая часть уравнения принимает наибольшее значение при $x = -4$, равное 2, и правая часть убывает, то для установления количества корней надо сравнивать 2 и a^{-4} . Если $a^{-4} < 2$, то графики левой и правой частей уравнения пересекаются в двух точках, уравнение имеет два корня. Если $a^{-4} = 2$, то графики пересекаются в одной точке $(-4; 2)$ и уравнение имеет один корень $x = -4$. Если $a^{-4} > 2$, то графики не пересекаются и уравнение не имеет корней. Итак, при $a^{-4} = 2$, или $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, уравнение имеет единственный корень.

5. Пусть $a^{\sin x} = t > 0$. Тогда имеем $(at - 1)^{-1} \geq (t - 1)^{-1} \Leftrightarrow \frac{t(1-a)}{(at-1)(t-1)} \geq 0$. Если $a > 1$, то $1 - a < 0$ и решение неравенства $t \in (-\infty; 0] \cup (\frac{1}{a}; 1)$, и так как $t > 0$, $t \in (\frac{1}{a}; 1)$. Если $0 < a < 1$, то $1 - a > 0$, $t \in (0; 1) \cup (\frac{1}{a}; +\infty)$. Решим неравенство для a^x . При $a > 1$ $a^{\sin x} \in (\frac{1}{a}; 1)$, значит, $\sin x \in (-1; 0)$. По условию, $x \in [0; \pi]$. Значит, неравенство при $a > 1$ решений не имеет. При $0 < a < 1$ $a^{\sin x} \in (0; 1) \cup (\frac{1}{a}; +\infty)$, откуда $\sin x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. Значит, $x \in (0; \pi)$. Итак, при $a > 1$ неравенство решений не имеет. При $0 < a < 1$ $x \in (0; \pi)$.

Вариант 2

1. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$7^x \cdot 3^{\frac{3x+3}{x+2}} = 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 7^{x-1} \cdot 3^{\frac{3x+3}{x+2}-2} = 1 \Leftrightarrow 7^{x-1} \cdot 3^{\frac{x-1}{x+2}} = 1 \Leftrightarrow \left(7 \cdot 3^{\frac{1}{x+2}}\right)^{x-1} = 1.$$

Решаем $x - 1 = 0$ либо $7 \cdot 3^{\frac{1}{x+2}} = 1$, откуда имеем $x = 1$ или $x = \log_7 \frac{1}{3} - 2$. Положительный корень уравнения: $x = 1$.

2. Неравенство можно переписать в виде

$$(5^{\sqrt{y}} - 3)(3y^2 - y - 2) < 0 \Leftrightarrow 3(5^{\sqrt{y}} - 3)(y - 1)(y + \frac{2}{3}) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ (5^{\sqrt{y}} - 3)(y - 1) < 0, \end{cases}$$

то есть $y \in ((\log_5 3)^2; 1)$.

3. $y = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ подставим во второе уравнение и получим

$$x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}},$$

тогда $x=1$ либо $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$, откуда $x=4$.

Поэтому решение такое:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ x=4, \\ y=2. \end{cases}$$

Уравнение прямой: $x-3y+2=0$.

4. Уравнение имеет единственное решение при $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. См. вар. 1.

Графики левой и правой частей уравнения приведены на рис. 213.

5. Если $a > 1$, то $x \in (0; \pi)$. Если $0 < a < 1$, то нет решений. См. вар. 1.

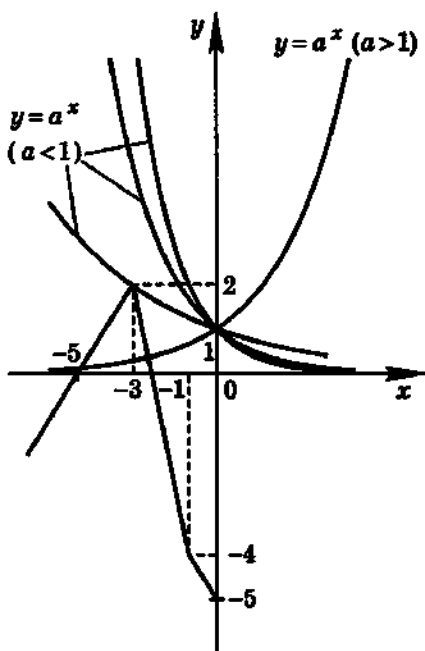


Рис. 213

Задание 11.6. Равносильность при решении логарифмических уравнений

Вариант 1

1. а) Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 1, \\ \left(\left| x - \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right| \left(\left| x - \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right| \right) > 0, \right. \end{cases} \text{ то есть } x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$\begin{cases} x-1 = x^2 - x - 3, \\ x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Корень $x = 1 + \sqrt{3}$.

- б) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y \neq 0, \\ y \neq 2, \\ y \neq 1, \\ y^4 + 6y^2 + 9 = (y-1)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0, \\ y \neq 2, \\ y \neq 1, \\ (y^2 + 3)^2 - (y-1)^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0, \\ y \neq 2, \\ y \neq 1, \\ (y^2+3-(y-1)^2)(y^2+3+(y-1)^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0, \\ y \neq 2, \\ y \neq 1, \\ 2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-1.$$

$$\text{в) } z^{\log_{\sqrt{x}} 2z} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ \log_{\sqrt{x}} 2z \text{ — существует,} \\ z > 0, \\ \log_{\sqrt{x}} 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 0, \\ z \neq 1, \\ 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \log_2(2^t+1)(\log_2(2^t+1)+1) &= 2 \Leftrightarrow \log_2^2(2^t+1) + \log_2(2^t+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_2(2^t+1)+2)(\log_2(2^t+1)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2^t+1) = 1, \\ \log_2(2^t+1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^t+1=2, \\ 2^t+1=2^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow 2^t=1 \Leftrightarrow t=0. \end{aligned}$$

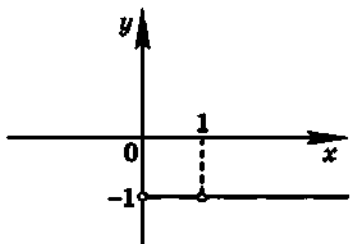


Рис. 214

2. Исходное множество определяется из условий:

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0, \\ -y > 0, \\ -y = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (\text{рис. 214}).$$

Вариант 2

1. а) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x-1 > 0, \\ -x-1 = x^2 - |x| - 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x^2 - |x| + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

б) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |y+1| \neq 1, \\ y+1 \neq 0, \\ y^4 + 6y^2 + 9 = (y+1)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -1, \\ y \neq 0, \\ y \neq -2, \\ (y^2+3)^2 - (y+1)^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -1, \\ y \neq 0, \\ y \neq -2, \\ (y^2+3-(y+1)^2)(y^2+3+(y+1)^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -1, \\ y \neq 0, \\ y \neq -2, \\ 2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=1.$$

в) Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sqrt{z}=1, \\ \log_x(z^2-1) \text{ — существует,} \\ z>0, \\ \log_x(z^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{Q}, \\ z^2-1=1, \\ z>0 \end{cases} \Leftrightarrow z=\sqrt{2}.$$

г) Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_3^2(3^t+2)+\log_3(3^t+2)-2=0 \Leftrightarrow (\log_3(3^t+2)+2)(\log_3(3^t+2)-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(3^t+2)=-1, \\ \log_3(3^t+2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^t+2=\frac{1}{9}, \\ 3^t+2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^t=-1\frac{8}{9}, \\ 3^t=1 \end{cases} \Leftrightarrow t=0.$$

2. Координаты исходного множества удовлетворяют следующим

$$\text{условиям: } \begin{cases} x>0, \\ x \neq 1, \\ y=y^2, \\ y>0 \end{cases} \quad (\text{рис. 215}).$$

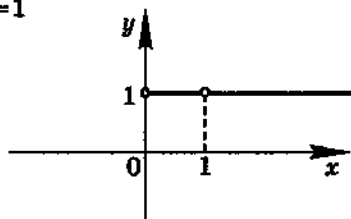


Рис. 215

Задание 11.7. Равносильность при решении логарифмических неравенств

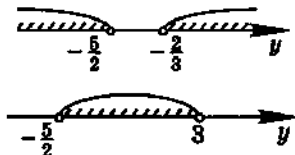
Вариант 1

1. а) Исходное неравенство равносильно системе

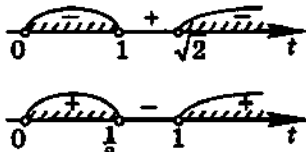
$$\begin{cases} x^2+x+1>0, \\ x^2+x+1 \neq 1, \\ x-2>0, \\ (x^2+x+1-1)(x-2-(x^2+x+1)^0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(x-3)>0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow x>3.$$

б) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_3 \frac{3y+2}{2y+5} \leq 0, \\ \frac{3y+2}{2y+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \frac{3y+2}{2y+5} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3y+2}{2y+5} > 0, \\ \frac{y-3}{2y+5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -\frac{2}{3}, \\ y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < y \leq 3, y \in (-\frac{2}{3}; 3].$$



в) Пусть $\log_t(2t) = x$, тогда исходное неравенство можно записать как $x \leq \sqrt{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 \leq 3x \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$. Тогда $0 \leq \log_t(2t) \leq 3$, что равносильно

$$\begin{cases} (t-1)t(2-t^2) \leq 0, \\ (t-1)(2t-t^3) \leq 0, \\ (t-1)(2t-t^0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(2t-1) \geq 0, \\ t > 0, t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow t \in (0; \frac{1}{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty).$$

2. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (a-1)(x^2+2-a) > 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x^2+2-a < 0, \\ a > 1, \\ x^2+2-a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < x^2+2, \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < 2.$$

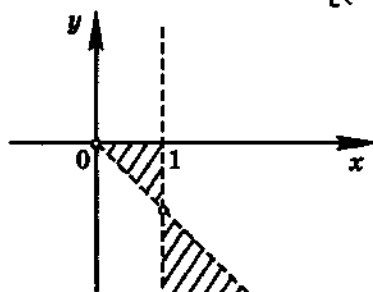


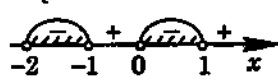
Рис. 216

3. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ (x-1)(-y-x) > 0, \\ -y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 > y > -x, \\ x > 1, \\ y < -x \end{cases}$$

(рис. 216).

Вариант 2

$$\begin{aligned} 1. \text{ а) } \log_{x^2-x+1}(x+2) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1 > 0, \\ x+2 > 0, \\ (x^2-x+1-1)(x+2-1) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x(x-1)(x+1) < 0, \end{cases} \end{aligned}$$


$$\Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (0; 1).$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 \frac{3y-1}{2y+3}} &\geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3y-1}{2y+3} > 0, \\ \log_2 \frac{3y-1}{2y+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{3}, \\ y < -\frac{3}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{3}, \\ y < -\frac{3}{2}, \\ \frac{3y-1}{2y+3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{3}, \\ y < -\frac{3}{2}, \\ \frac{y-4}{2y+3} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{3}, \\ y < -\frac{3}{2}, \\ -\frac{3}{2} < y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < y \leq 4.$$

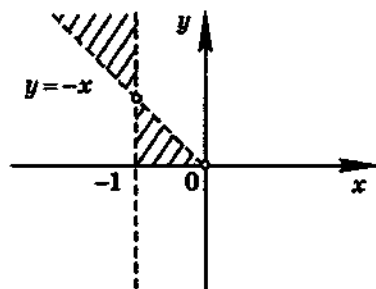
$$\text{в) } \log_t(3t) \leq \sqrt{\log_t(3t)^3} \Leftrightarrow \log_t(3t) \leq (3\log_t(3t))^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, t \neq 1, \\ \log_t(3t) \geq 0, \\ \log_t^2(3t) - 3\log_t(3t) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, t \neq 1, \\ (t-1)(3t-1) > 0, \\ 0 \leq \log_t(3t) \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, t \neq 1, \\ \begin{cases} t > 1, \\ t < \frac{1}{3} \end{cases} \\ (t-1)(3t-t^3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 1, \\ 0 < t < \frac{1}{3}, \\ t \geq \sqrt{3}, \\ 0 \leq t \leq 1, \\ t \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow t \in (0; \frac{1}{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty).$$

2. Исходное неравенство равносильно $(a-1)(|x|+3-\frac{1}{a}) < 0$,

$$\text{то есть } \begin{cases} a > 1, \\ |x| < \frac{1}{a} - 3, \\ 0 < a < 1, \\ |x| > \frac{1}{a} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ |x| > \frac{1}{a} - 3, \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a < 1.$$



3. Задача решается аналогично вар. 1 (рис. 217).

Рис. 217

Задание 11.8. Логарифмические уравнения

Вариант 1

1. а) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \lg \frac{(x+3)^2(x+5)^2}{x^2+8x+7} = \lg 32, \\ x+3 > 0, \\ x^2+8x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+3)^2(x+5)^2}{x^2+8x+7} = 32, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+8x+15)^2=32(x^2+8x+7), \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2+8x+7, \\ x>-1, \\ (t+8)^2-32t=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2+8x+7, \\ x>-1, \\ (t-8)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x^2+8x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-4+\sqrt{17}.$$

б) Исходное уравнение равносильно уравнению $3^{\log_3 y} \cdot y^{\log_3 y} = 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{\log_3 y}{\log_3 y}} y^{\log_3 y} = 3^2 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\log_3 y}} y^{\log_3 y} = 3^2 \Leftrightarrow \log_3 (3^{\frac{1}{\log_3 y}} \cdot y^{\log_3 y}) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{\frac{1}{\log_3 y}} + \log_3 y^{\log_3 y} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 y} + \log_3^2 y = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^3 y - 2\log_3 y + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3^3 y - 1 - 2(\log_3 y - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 y - 1)(\log_3^2 y + \log_3 y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 y = 1, \\ \log_3 y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Решение: $y=3$, $y=3^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$, $y=3^{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}$.

в) Исходное уравнение равносильно уравнению

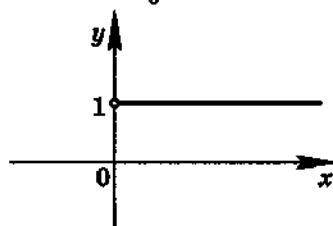
$$(\log_{|\cos z|} 16)(\log_{2\cos^2 z} 2) = z^{\log_2 4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_2 16}{\log_2 |\cos z|} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 (2\cos^2 z)} = 4, \\ z > 0, z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 |\cos z| \cdot (1+2\log_2 |\cos z|) = 1, \\ z > 0, z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2^2 |\cos z| + \log_2 |\cos z| - 1 = 0, \\ z > 0, z \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{то есть } \begin{cases} \log_2 |\cos z| = \frac{-1 \pm 3}{4}, \\ z > 0, z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 |\cos z| = -1, \\ \log_2 |\cos z| = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos z| = \frac{1}{2}, \\ |\cos z| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее системе $\begin{cases} 2 \leq |z| \leq 4, \\ z \neq 1, \\ z > 0, \end{cases}$

есть $z = \frac{2\pi}{3}$.



2. Исходное условие равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, y > 0, \\ xy = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0, \\ x(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \in \mathbb{R}, \\ y = 1 \end{cases}$$

(рис. 218).

Рис. 218

3. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \lg \left(\frac{\sqrt{t^2 - a + t}}{\sqrt{t^2 - a - t}} \right) = \lg a, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{t^2 - a + t}}{\sqrt{t^2 - a - t}} = a, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(\sqrt{t^2 - a + t})^2}{-a} = a, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{t^2 - a + t})^2 = -a^2, \\ a > 0, \end{cases} \text{ отсюда следует, что уравнение не имеет решений ни при каких } a.$$

Вариант 2

1. а) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \lg \frac{(x+1)^2(x+3)^2}{x^2+4x-5} = \lg 32, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+4x+3)^2 = 32(x^2+4x-5), \\ x > 1. \end{cases}$$

Обозначим $t = x^2 + 4x + 3$, тогда уравнение примет вид $t^2 = 32(t - 3)$, которое имеет решение $t = 16$. Поэтому: $x^2 + 4x + 3 = 16$. Последнее уравнение имеет решения $x = -2 \pm \sqrt{17}$. Так как для исходного уравнения $x > 1$, то его корень $x = -2 + \sqrt{17}$.

б) Уравнение решается аналогично вар. 1. После преобразований получим равносильное уравнение

$$\log_2^3 y - 2\log_2 y + 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 y - 1)(\log_2^2 y + \log_2 y - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 y = 1, \\ \log_2 y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2, y = 2^{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, y = 2^{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}.$$

в) После преобразований, аналогичных вар. 1, получим равносильное уравнение

$$\begin{cases} 2\log_2^3 |\sin z| + \log_2 |\sin z| - 1 = 0, \\ z > 0, z \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin z| = \frac{1}{2}, \\ |\sin z| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Решение, удовлетворяющее условию задачи, таково: $z = \frac{11\pi}{8}$.

$$2. \text{ Искомое множество точек } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \frac{x}{y} = xy. \end{cases} \text{ График аналогичен графику,}$$

приведенному на рис. 218.

3. Исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} -\frac{a}{(\sqrt{t^2-a}+t)^2} = a, \\ a > 0. \end{cases}$$

Уравнение не имеет решений ни при каких a .

Задание 11.9. Логарифмические неравенства

Вариант 1

1. а) Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_y(1+y)(y^2-y+1) \cdot \log_{y+1} y > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_y(1+y) \cdot \log_{y+1} y + \log_y(y^2-y+1) \cdot \log_{y+1} y > 2.$$

Так как $\log_y(1+y) \cdot \log_{y+1} y = 1$, то исходное неравенство запишется в виде

$$\log_y(y^2-y+1) \cdot \log_{y+1} y > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{y+1}(y^2-y+1) > 1, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+1-1)(y^2-y+1-(y+1)) > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(y-2) > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y > 2.$$

б) Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3 x > \frac{1}{2} \log_3(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x^2 > \log_3(x+1), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

в) Область допустимых значений определяется из условий:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ x < \frac{5}{2}, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 2.5).$$

Исходное неравенство в области допустимых значений равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_{3-x} x} \cdot \frac{1}{\log_{3-x}(2x-1)} &< \frac{1}{\log_{3-x} x} \cdot \frac{1}{\log_{3-x}(5-2x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{3-x} x} \cdot \frac{\log_{3-x}(5-2x) - \log_{3-x}(2x-1)}{\log_{3-x}(2x-1) \log_{3-x}(5-2x)} &< 0. \end{aligned}$$

Если $0 < 3-x < 1$, то есть $2 < x < 2,5$, то $\log_{3-x} x < 0$ и $\log_{3-x}(2x-1) < 0$, $\log_{3-x}(5-2x) > 0$. Значит, для выполнения исходного неравенства необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\log_{3-x}(5-2x) - \log_{3-x}(2x-1) < 0 \text{ при } 2 < x < 2,5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x > 2x-1, \\ 2 < x < 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2}, \\ 2 < x < 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Если $3-x > 1$, что возможно при допустимых значениях $x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; 2)$, то при $x \in (\frac{1}{2}; 1)$ $\log_{3-x}(2x-1) < 0$, $\log_{3-x} x < 0$, $\log_{3-x}(5-2x) > 0$. Тогда исходное неравенство равносильно

$$\begin{cases} \log_{3-x}(5-2x) < \log_{3-x}(2x-1), \\ x \in (\frac{1}{2}; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ x \in (\frac{1}{2}; 1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

если $x \in (1; 2)$, то $\log_{3-x}(2x-1) > 0$, $\log_{3-x} x > 0$, $\log_{3-x}(5-2x) > 0$. Для рассматриваемых значений x исходное неравенство равносильно $\log_{3-x}(5-2x) < \log_{3-x}(2x-1) \Leftrightarrow x \in (\frac{3}{2}; 2)$.

Итак, решение: $x \in (\frac{3}{2}; 2)$.

г) Определим знаки выражений в исходном неравенстве для x из области допустимых значений. Область допустимых значений определяется из системы

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin 2x > 0, \\ \sin 2x \neq 1, \\ \cos x > 0, \\ \cos 2x > 0, \\ \cos 2x \neq 1. \end{cases}$$

Так как функции периодические и период для всего неравенства есть 2π , определим область допустимых значений для $x \in [0; 2\pi]$. Из решения системы неравенств следует, что допустимые значения $x \in (0; \frac{\pi}{4})$. Нетрудно определить, что при $x = \frac{\pi}{6}$ $\sin 2x = \cos x$ и $\cos 2x = \sin x$. Значит, для $x = \frac{\pi}{6}$ имеем $\log_{\sin \frac{2\pi}{6}} \cos \frac{\pi}{6} = 1$ и $\log_{\cos 2x} \sin x = 1$.

При $x \in (0; \frac{\pi}{6})$ $\cos x > \sin 2x$ и $\cos 2x > \sin x$, поэтому $\log_{\sin 2x} \cos x < 1$, $\log_{\cos 2x} \sin x > 1$. Решение в промежутке $(0; \frac{\pi}{4})$ есть $x \in (0; \frac{\pi}{6})$. Учитывая период, решения имеют вид $x \in (2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{6})$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Подставим в исходное неравенство $x = 3$. Тогда $\log_a 10 < \log_a 4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_a 10 < \log_a 4 \Leftrightarrow \log_a \sqrt{10} < \log_a 4$. Так как $\sqrt{10} < 4$, то последнее неравенство возможно только при $a > 1$. Тогда исходное неравенство

равносильно неравенству $\sqrt{x^2+1} < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x^2+1 < x^2+1+2x \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Итак исходное неравенство верно при $a > 1$ и $x > 0$.

Вариант 2

1. а) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} y \neq 1, y > 0, y \neq 2, \\ \frac{\log_{y+1} y \cdot \log_y (y+1)}{\log_{y+1} (y+1)(y^2-y+1)} > 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, y \neq 1, y \neq 2, \\ \frac{1}{1+\log_{y+1} (y^2-y+1)} > 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, y \neq 1, y \neq 2, \\ \frac{0,5 - 0,5 \log_{y+1} (y^2-y+1)}{1+\log_{y+1} (y^2-y+1)} > 0. \end{cases} (*)$$

Для $y > 0$ $1+\log_{y+1} (y^2-y+1) > 0$, действительно

$$1+\log_{y+1} (y^2-y+1) = \log_{y+1} (y^3+1) > 0.$$

Тогда система (*) сводится к системе

$$\begin{cases} y > 0, y \neq 1, y \neq 2, \\ 0,5(1-\log_{y+1} (y^2-y+1)) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, y \neq 1, y \neq 2, \\ \log_{y+1} \frac{y+1}{y^2-y+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, y \neq 1, y \neq 2, \\ (y+1-1) \left(\frac{y+1}{y^2-y+1} - 1 \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in (0; 1) \cup (1; 2).$$

- б) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

в) Область допустимых значений: $x \in (2; 3) \cup (3; 4)$. Для допустимых значений x исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{\log_{5-x} (x-2)} \cdot \frac{\log_{5-x} (4-x) - \log_{5-x} (x-1)}{\log_{5-x} (x-1) \log_{5-x} (4-x)} < 0.$$

Далее, рассматривая отдельно случаи $0 < 5-x < 1$ и $5-x > 1$, решаем неравенство. См. вар. 1. Решение: $x \in (2; 2,5)$.

г) Рассматриваемое неравенство противоположно неравенству из вар. 1. Поэтому решение $x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

2. Подставим $x = -\frac{1}{3}$. Тогда $\log_a (\frac{1}{9} + 1) < \log_{\sqrt{a}} \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_a \frac{10}{9} < \log_a \frac{4}{9}$. Так как $\frac{10}{9} > \frac{4}{9}$, то неравенство возможно только при $0 < a < 1$. При таких a исходное неравенство можно свести к неравенствам

$$\begin{cases} x^2+1 > x^2+2x+1, \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0).$$

Задача 11.10. Системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Вариант 1

1. а) Из второго уравнения $x = y \log_3 15$ подставим в первое и получим $(y \log_3 15)^y = y^{y \log_3 15} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1, \\ (\log_3 15)^y = y^{y(\log_3 15 - 1)} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1, \\ y > 0, \\ \log_3 (\log_3 15)^y = \log_3 y^{y(\log_3 15 - 1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1, \\ y > 0, \\ y \log_3 (\log_3 15) = y \log_3 5 \cdot \log_3 y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1, \\ y > 0, \\ y(\log_3 (\log_3 15) - \log_3 5 \cdot \log_3 y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 (\log_3 15) = \log_3 5 \cdot \log_3 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 y = \frac{\log_3 (\log_3 15)}{\log_3 5} \Leftrightarrow y = 3^{\frac{\log_3 (\log_3 15)}{\log_3 5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 3^{\log_3 3 \log_3 (\log_3 15)} = 3^{\log_3 (\log_3 15) \log_3 3} = (\log_3 15)^{\log_3 3}.$$

$$x = \log_3 15 (\log_3 15)^{\log_3 3} = (\log_3 15)^{\log_3 15}.$$

$$\text{Итак, решение: } \begin{cases} x = (\log_3 15)^{\log_3 15}, \\ y = (\log_3 15)^{\log_3 3}. \end{cases}$$

б) Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \log_3 |x| y^2 = 0, \\ x^2 - 9y^2 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{|x|}, \\ |x| \neq 0, \\ x^2 - \frac{9}{|x|} = 80. \end{cases}$$

Решим уравнение

$$x^2 - \frac{9}{|x|} = 80 \Leftrightarrow |x|^3 - 80|x| - 9 = 0 \Leftrightarrow (|x| - 9)(x^2 + 9|x| + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| = 9. \text{ Итак, решения: } (9; \frac{1}{9}), (9; -\frac{1}{9}), (-9; \frac{1}{9}), (-9; -\frac{1}{9}).$$

в) Известно, что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. Тогда первое уравнение системы запишем как $2x^{\log_3 y} = 2 \Leftrightarrow x^{\log_3 y} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y > 0, \\ x > 0, y = 1. \end{cases}$ Тогда из второго уравнения находим решения $(x; y)$: $(1; 3), (3; 1)$.

г) Область допустимых значений: $x, y, z > 0$. Запишем систему

$$\begin{cases} z = x^{-y}, \\ x = y^{-z}, \\ y = z^{-x}. \end{cases}$$

Легко проверить, что система имеет решение

$$x = y = z = 1.$$

Пусть $x > 1$, тогда из второго уравнения следует, что $y^{-z} > 1$. Так как $z > 0$, то это возможно при $y < 1$. Тогда из третьего уравнения следует $y = z^{-x} < 1$. И так как $x > 1$, то $z = y^{-\frac{1}{x}} > 1$. Из первого уравнения следует, что $z = x^{-y} = \frac{1}{x^y} < 1$. Пришли к противоречию. Значит, корней $x > 1$ нет.

Пусть $0 < x < 1$, тогда из второго уравнения: $x = y^{-z} < 1$, и так как $z > 0$, то $y > 1$. Тогда из третьего уравнения: $y = z^{-x} > 1$ и $z = y^{-\frac{1}{x}} < 1$. А из первого уравнения: $z = x^{-y} > 1$. Значит, нет решений $x < 1$.

Итак, система имеет единственное решение: $x = y = z = 1$.

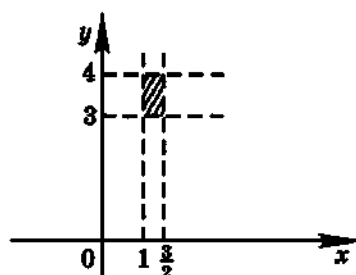


Рис. 219

2. Область допустимых значений: $1 < x < 2$, $2 < y < 4$, $y \neq 3$. В области допустимых значений $0 < 2 - x < 1$, то есть основание логарифма в первом неравенстве меньше 1. Значит, из первого неравенства следует $0 < 2 - y < 1$, то есть $y > 3$. Но при $y > 3$ $0 < 4 - y < 1$, и из второго неравенства следует $0 < 2x - 2 < 1$, то есть $1 < x < \frac{3}{2}$. Итак, решение: $\begin{cases} 1 < x < \frac{3}{2}, \\ 3 < y < 4 \end{cases}$

(рис. 219).

Вариант 2

1. а) Из второго уравнения $x = y \log_5 15$, $x > 0$, $y > 0$, подставим в первое уравнение:

$$(y \log_5 15)^y = y^{y \log_5 15} \Leftrightarrow y^y (\log_5 15)^y = y^{y \log_5 15} \Leftrightarrow (\log_5 15)^y = y^{y(\log_5 15 - 1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5 [(\log_5 15)^y] = \log_5 (y^{y \log_5 3}) \Leftrightarrow y \log_5 (\log_5 15) = y \log_5 3 \cdot \log_5 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5 y = \frac{\log_5 (\log_5 15)}{\log_5 3} \Leftrightarrow y = 5^{\frac{\log_5 (\log_5 15)}{\log_5 3}} \Leftrightarrow y = (\log_5 15)^{\log_5 5},$$

$$x = (\log_5 15)^{\log_5 5 + 1} = \log_5 15^{\log_5 15}.$$

б) Из первого уравнения $\log_2|x| + \log_2 y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{|x|}$ подставим

во второе уравнение:

$$x^2 - \frac{4}{|x|} = 15 \Leftrightarrow |x|^3 - 15|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 16|x| + |x| - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 4)(x^2 + 4|x| + 1) = 0 \Leftrightarrow |x| = 4, y^2 = \frac{1}{4}.$$

Решения: $(4; \frac{1}{2}), (4; -\frac{1}{2}), (-4; \frac{1}{2}), (-4; -\frac{1}{2})$.

в) $y^{\log_2 x} = x^{\log_2 y}$, поэтому $2x^{\log_2 y} = 2 \Leftrightarrow x^{\log_2 y} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y>0, \\ x>0, y=1. \end{cases}$

Из второго уравнения находим решения: $(1; 2), (2; 1)$.

г) Решение $x = y = z = 1$. См. вар. 1.

2. Решение: $\begin{cases} 4 < x < 5, \\ 2,5 < y < 3 \end{cases}$ (рис. 220).

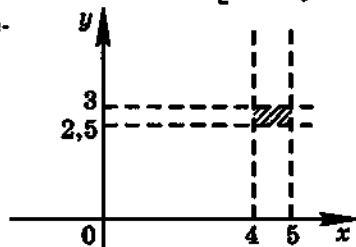


Рис. 220

Задание 11.11. Логарифмические уравнения с параметром

Вариант 1

1. а) Пусть $a=1$, тогда уравнение принимает вид $\log_x a = 0$. Решения: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Тогда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_a x \neq 0, \\ \log_a x \neq -1, \\ \frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a x + 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x > 0, \\ x \neq \frac{1}{a}, \\ 3\log_a x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x > 0, \\ x \neq \frac{1}{a}, \\ x = a^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$$

так как $a > 0$ и $a \neq 1$, то $a^{-\frac{2}{3}} \neq 1$ и $a^{-\frac{2}{3}} \neq \frac{1}{a}$, значит, решение: $x = a^{-\frac{2}{3}}$ при $a > 0, a \neq 1$. Если $a=1$, то решение: $x > 0, x \neq 1$.

б) Исходное уравнение равносильно следующему:

$$\log_a x^{\log_a x} = \log_a (a^2 x) \Leftrightarrow \log_a^2 x - \log_a x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_a x - 2)(\log_a x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x = 2, \\ \log_a x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x = a^2, \\ x = \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1, \\ x = a^2, \\ x = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

2. На промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$ $0 \leq \sin x \leq 1$. Так как $\sin 0 = 0$, то область допустимых значений: $x \in (0; \frac{\pi}{2}]$. Тогда можно записать:

$\log_a(\sin x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$, $\sin x = a^{\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}}$, решение возможно при $1+4a \geq 0$, так как по условию $a > 1$, то это условие выполняется. Так как $|\sin x| < 1$, то должно быть выполнено условие $a^{\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}} \leq 1$. При $a > 1$ $-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} < 0$ и $0 < a^{\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}} < 1$, $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0$ и $a^{\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}} > 1$. Поэтому решение уравнения при $a > 1$ $\sin x = a^{\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}}$ $x = \arcsin a^{\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}}$.

3. Решим задачу с помощью графиков.

Правая часть уравнения не зависит от a :

$$|x+1|+|x-5| = \begin{cases} 6 & \text{при } 0 < x \leq 6, \\ 2x-4 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Левая часть уравнения убывает при $0 < a < 1$, $x > 0$ и возрастает при $a > 1$, $x > 0$. Пусть $0 < a < 1$.

Как видно из рис. 221, графики пересекаются в одной точке. На промежутке $x \in (0; 1)$ левая часть уравнения принимает значение $(0; +\infty)$, правая часть постоянна и равна 6. Значит, при $0 < a < 1$ уравнение имеет единственное решение.

Пусть $a > 1$. Тогда возможны следующие виды графиков (рис. 222а, 222б, 222в).

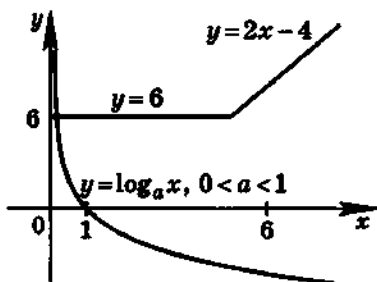


Рис. 221

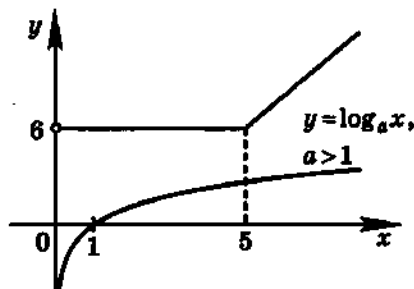


Рис. 222а

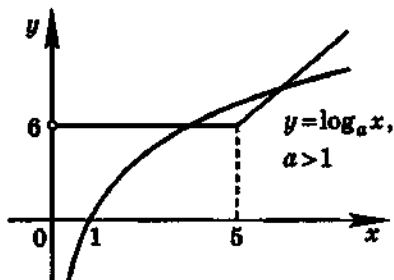


Рис. 222б

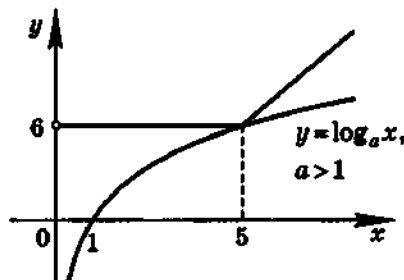


Рис. 222в

В случае (в) $\log_a 5 = 6$ — одна точка пересечения графиков, единственный корень ($a = 5^{\frac{1}{6}}$). Итак, уравнение имеет единственный корень при $0 < a < 1$ и $a = 5^{\frac{1}{6}}$.

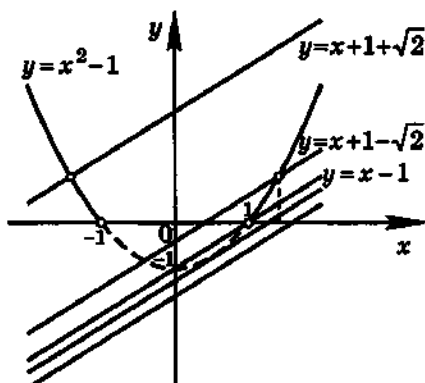


Рис. 223

4. Найдем a , при которых есть решения, и их уберем. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 1 = x + a, \\ x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + a, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty). \end{cases}$$

На рис. 223 при $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ части параболы $y = x^2 - 1$ — график левой части уравнения. Семейство прямых $y = x + a$ — графики правой части уравнения.

Уравнение имеет решения при $-1 < a < 1 - \sqrt{2}$ и при $a > 1 + \sqrt{2}$. Значит, уравнение не имеет решений при $a \leq -1$ и $a = 1 - \sqrt{2}$.

Вариант 2

1. а) Если $a = 1$, то уравнение имеет вид $2\log_x 1 + \log_x 1 = 0$. Это уравнение имеет такое решение: $x > 0, x \neq 1$. Если $a \neq 1, a > 0$, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a x + 2} = 0, \\ x > 0, x \neq 1, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x = -\frac{4}{3}, \\ x > 0, x \neq 1, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^{-\frac{4}{3}}, \\ x > 0, x \neq 1, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

Так как при $a > 0, a \neq 1$ $a^{-\frac{4}{3}} > 0$ и $a^{-\frac{4}{3}} \neq 1$, то решение уравнения: $x = a^{-\frac{4}{3}}$.

- б) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_a x^{\log_a x} = \log_a \left(\frac{a^2}{x}\right), \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a^2 x = 2 - \log_a x, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a^2 x + \log_a x - 2 = 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_a x + 2)(\log_a x - 1) = 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x = 1, \\ \log_a x = -2, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ x = \frac{1}{a^2}, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

2. Из исходного уравнения можно определить $\log_a(\cos x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ при

$$\begin{cases} 1+4a \geq 0, \\ a > 0, \\ a < 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \cos x = a^{\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}} \\ a > 0, a < 1. \end{cases} \quad |\cos x| \leq 1. \text{ Поэтому для решения}$$

должны выполняться условия:
$$\begin{cases} \left| a^{\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}} \right| \leq 1, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

При $0 < a < 1$ $a^{\frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}} > 1$, $a^{\frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}} < 1$. Значит, $\cos x = a^{\frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}}$, $0 < a < 1$. Решение уравнения на промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$, $0 < a < 1$,

$$x = \arccos a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}}.$$

3. Решение можно провести аналогично вар. 1. Но можно заметить, что если сделать замену $t = -x$, уравнение сведется к уравнению вар. 1. Ответ: единственное решение при $0 < a < 1$ или $a = \sqrt[6]{5}$.

4. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - a = 1 - x, \\ 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = a - x, \\ x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

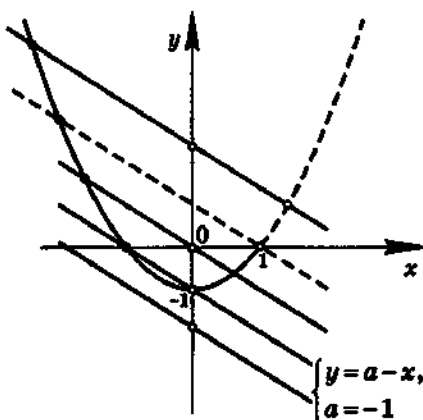


Рис. 224

Графики левой и правой частей уравнения см. на рис. 224. Уравнение имеет решения при всех $a \geq a_0$, где a_0 определяется следующим образом. Прямая $y = a_0 - x$ — касательная к графику $y = x^2 - 1$. Нетрудно определить, что $y' = 2x_0 = -1$, $x_0 = -\frac{1}{2}$ — абсцисса точки касания. Тогда касательная в этой точке:

$$y = -\frac{3}{4} - (x + \frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} - x.$$

Прямая $y = a_0 - x$ совпадает с этой касательной при $a_0 = -\frac{5}{4}$. Значит, уравнение не имеет решений при $a_0 < -\frac{5}{4}$.

Вариант 1

1. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} y-2>0, \\ 2x+3>0, \\ (y-2-2x-3)(2x+3-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y>2, \\ -\frac{3}{2}<x<-1, \\ y>2x+5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>2, \\ x>-1, \\ y<2x+5. \end{cases}$$

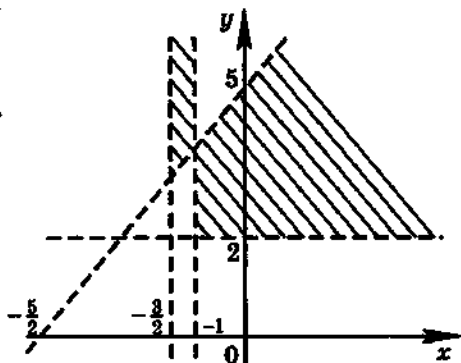


Рис. 225

Множество точек на плоскости см. на рис. 225.

2. Исходное неравенство равносильно следующему

$$\begin{aligned} \sqrt{25-x^2}-1 \geq |x|+1 &\Leftrightarrow \sqrt{25-x^2} \geq |x|+2 \Leftrightarrow 25-x^2 \geq x^2+4|x|+4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2|x|^2+4|x|-21 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{46}-2}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{46}-2}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{46}-2}{2}. \end{aligned}$$

Целые решения: $-2; -1; 0; 1; 2$.

3. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-2x \log_{0,5} a^2-2 \log_{0,5} a^2+3 < 0.$$

Это квадратное неравенство относительно x . Квадратный трехчлен имеет отрицательные значения только в том случае, когда дискриминант положительный: $D=4 \log_{0,5}^2 a^2-12+8 \log_{0,5} a^2 > 0$. Условиям задачи удовлетворяют такие a , при которых дискриминант положителен. Неравенство $D > 0$ можно решить так: $t = \log_{0,5} a^2$. Тогда

$$4t^2+8t-12 > 0 \Leftrightarrow t^2+2t-3 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1, \\ t < -3. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} \log_{0,5} a^2 > 1, \\ \log_{0,5} a^2 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a^2 < \frac{1}{2}, \\ a^2 > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ |a| > \sqrt{8}. \end{cases}$ Итак, неравенство

имеет решения при $\begin{cases} 0 < |a| < 2^{-0,5}, \\ |a| > 2^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

4. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2+2x-a^2)(a^2-1) < 0, \\ x^2+2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((x+1)^2-(a^2+1))(a^2-1) < 0, \\ (x+1)^2-1 > 0. \end{cases}$$

Можно рассмотреть новую переменную $t=x+1$, тогда система запишется в виде $\begin{cases} (t^2 - (a^2+1))(a^2-1) < 0, \\ t^2 - 1 > 0. \end{cases}$ Неравенство является чет-

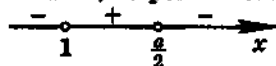
ным относительно t , значит, если t_0 — решение ($t_0 > 0$), то $(-t_0)$ — тоже решение. Чтобы решения образовали один промежуток, необходимо, чтобы $t=0$ было решением. Но это не так. Поэтому ни при каких a неравенство не имеет решением один промежуток относительно t . Отсюда следует, что для переменной x решения исходного неравенства не образуют один промежуток ни при каких a .

5. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (a-x)(x-1) < 0, \\ x > 0, \\ a-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2x)(x-1) < 0, \\ x > 0, \\ x < a. \end{cases}$$

Так как x должно удовлетворять неравенствам $\begin{cases} x > 0, \\ x < a \end{cases}$ при $a \leq 0$, неравенство не имеет решений.

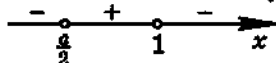
Если $a > 0$, то система $\begin{cases} x > 0, \\ x < a \end{cases}$ имеет решения. Решение неравенства $(a-2x)(x-1) < 0$ зависит от a . Корни левой части неравенства: $x = \frac{a}{2}$ и $x = 1$. Если $\frac{a}{2} > 1$, то есть $a > 2$, то решение: $x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{a}{2}; +\infty)$.



Тогда исходное неравенство имеет решения:

$$\begin{cases} 0 < x < a, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{a}{2}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (\frac{a}{2}; a).$$

Если $0 < \frac{a}{2} < 1$, то $0 < a < 2$. Решения в этом случае: $x \in (-\infty; \frac{a}{2}) \cup (1; +\infty)$.



Решения исходного неравенства при $0 < a < 2$: $\begin{cases} 0 < x < a, \\ x \in (-\infty; \frac{a}{2}) \cup (1; +\infty). \end{cases}$

Нетрудно убедиться, что это решение — непустое множество. Если $a=2$, то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} -2(x-1)^2 < 0, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 2).$$

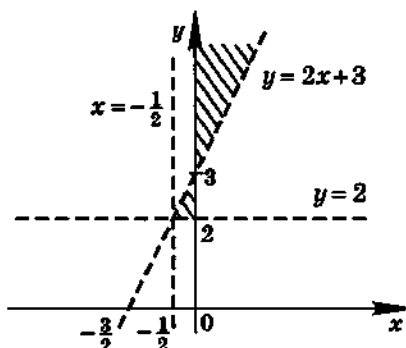
Итак, исходное неравенство не имеет решений при $a \leq 0$.

Вариант 2

1. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} y > 2, \\ 2x + 1 > 0, \\ (2x + 1 - 1)(y - 2 - 2x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 2, \\ x > -\frac{1}{2}, \\ 2x(y - 2x - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 2, \\ -\frac{1}{2} < x < 0, \\ y < 2x + 3, \\ x > 0, \\ y > 2x + 3. \end{cases}$$



Это множество выглядит так, как на рис. 226.

Рис. 226

2. Исходное неравенство при $0 < a < 1$ равносильно неравенству

$$\sqrt{25 - x^2} - 1 \geq |x| + 1.$$

Это неравенство решено в вар. 1. Целые решения: $-2; -1; 0; 1; 2$.

3. Исходное неравенство имеет решения, когда дискриминант квадратного трехчлена положителен: $4\log_{0,5}^2 a^2 - 8\log_{0,5} a^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_{0,5}^2 a^2 - 2\log_{0,5} a^2 - 3 > 0$. Если обозначить $t = \log_{0,5} a^2$, то неравенство запишется в виде $t^2 - 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 3, \\ t < -1. \end{cases}$ Тогда

$$\text{для } a: \begin{cases} \log_{0,5} a^2 > 3, \\ \log_{0,5} a^2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a^2 < 0,5^3, \\ a^2 > \frac{1}{0,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a^2 < \frac{1}{8}, \\ a^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < |a| < 2^{-\frac{3}{2}}, \\ |a| > 2^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

4. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2 - 2x - a^2)(a^2 - 1) < 0, \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((x-1)^2 - a^2 - 1)(a^2 - 1) < 0, \\ (x-1)^2 - 1 > 0. \end{cases} \text{ Если } t = x - 1, \text{ то}$$

$$\begin{cases} (a^2 - 1)(t^2 - 1 - a^2) < 0, \\ t^2 - 1 > 0. \end{cases} \text{ Далее можно применить те же рассуждения,}$$

что и в вар. 1 и прийти к выводу, что неравенство не имеет решений, образующих один промежуток, ни при каких a .

5. Сделаем замену $t = -x$ и получим неравенство из вар. 1. Значит, исходное неравенство не имеет решений при $a \leq 0$.

Задание 11.13. Контрольное задание

Вариант 1

1. Рассмотрим уравнение $[a(y)]^{b(y)} = 1$. Решениями этого уравнения

$$\text{будут такие } y, \text{ что } \begin{cases} a(y) = 1, \\ b(y) \text{ существует,} \\ a(y) > 0, \\ b(y) = 0. \end{cases}$$

Поэтому решения исходного уравнения удовлетворяют совокупности

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{y}{2-y} = 1, \\ 2y+1 > 0, \\ y^2-2 > 0, \\ \frac{y}{2-y} > 0, \\ \log_9(2y+1) - \log_9(y^2-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y > -\frac{1}{2}, \\ y^2 > 2, \\ y \in (0; 2), \\ \log_9 \frac{2y+1}{y^2-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \emptyset, \\ y \in (0; 2), \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \emptyset, \\ y \in (0; 2), \\ y = 3, \\ y = -1. \end{cases} \quad \text{Нет решений.} \end{aligned}$$

2. а) Пусть $t = 3^x > 0$. Тогда исходное неравенство можно записать:

$$\sqrt{t^2 - 4t} \geq t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t - 1 < 0, \\ t^2 - 4t \geq 0, \\ t^2 - 4t \geq (t-1)^2, \\ t - 1 \geq 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t < 1, \\ t \geq 4, \\ t \leq 0, \\ t \geq 1, \\ 2t < -1, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \emptyset.$$

Нет решений. Так как $t = 3^x$, то и исходное неравенство не имеет решений.

- б) Пусть $\log_{\frac{1}{3}} z = t$. Тогда $|t| > \sqrt{(t+2)^2} \Leftrightarrow t^2 > t^2 + 4t + 4 \Leftrightarrow t < -1$. Откуда $\log_{\frac{1}{3}} z < -1 \Leftrightarrow z > 3$.

- в) Область допустимых значений: $\begin{cases} |t| > 1, \\ |t| \neq 2, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in (1; 2) \cup (2; +\infty).$

Рассмотрим $t \in (1; 2)$. Тогда $|t| - 1 = t - 1$, $|t - 1| = t - 1$. Неравенство можно записать: $\log_{t-1}(8^t - 4^t) \geq \log_{t-1}(4^t - 1) \Leftrightarrow 8^t - 4^t \leq 4^t - 1 \Leftrightarrow 2^{3t} - 2 \cdot 2^{2t} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{3t} - 1 + 1 - 2 \cdot 2^{2t} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{3t} - 1 - 2(2^{2t} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (2^t - 1)(2^{2t} + 2^t + 1) - 2(2^t - 1)(2^t + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (2^t - 1)(2^{2t} - 2^t - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (2^t - 1)(2^t - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(2^t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \leq 0 \Leftrightarrow (2^t - 1)(2^t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \leq 0$. Так как $t \in (1; 2)$, то решений на этом промежутке неравенство не имеет. Рассмотрим $t \in (2; +\infty)$. Тогда неравенство равносильно неравенству

$$\log_{t-1}(8^t - 4^t) \geq \log_{t-1}(4^t - 1) \Leftrightarrow 8^t - 4^t \geq 4^t - 1 \Leftrightarrow 2^{3t} - 2 \cdot 2^{2t} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2^t - 1)(2^t + \frac{\sqrt{5}-1}{2})(2^t - \frac{\sqrt{5}+1}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow (2^t - 1)(2^t - \frac{\sqrt{5}+1}{2}) \geq 0, \text{ то есть}$$

$$\begin{cases} 2^t \leq 1, \\ 2^t \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0, \\ t \geq \log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \end{cases} \text{ Так как } \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 \text{ и рассматриваем случай}$$

$t \in (2; +\infty)$, то решением неравенства являются $t \in (2; +\infty)$. Других решений неравенство не имеет.

3. Так как выражение $a^{x^2-20x+64}$ имеет смысл только при $a > 0$, при $a \leq 0$ уравнение решений не имеет. Квадратный трехчлен $x^2 - 20x + 64$ имеет корни $x = 4$, $x = 16$. При $x = 4$ или $x = 16$ и $a > 0$ $a^{x^2-20x+64} = 1$, тогда правая часть уравнения равна 6. Подстановка $x = 4$ или $x = 16$ в левую часть уравнения дает 6. Значит, при $a > 0$ уравнение имеет по крайней мере два корня. Итак, единственного решения нет ни при каких a .

Вариант 2

1. Уравнение решений не имеет. См. вар. 1.
2. а) Исходное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 5^x - 1 < 0, \\ 25^x - 4 \cdot 5^x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 5^x \geq 4, \\ x \geq 0, \\ -4 \cdot 5^x \geq -25^x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \geq \log_5 4 > 0, \\ x \geq 0, \\ 5^x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Неравенство решений не имеет.

- б) Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} z > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}^2 0,25z < \log_{\frac{1}{2}}^2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 0, \\ (\log_{\frac{1}{2}} 0,25z + \log_{\frac{1}{2}} z)(\log_{\frac{1}{2}} 0,25z - \log_{\frac{1}{2}} z) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{z^2}{4} \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{z^2}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 0, \\ \frac{z^2}{4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow z > 2.$$

в) Решение неравенства $t > 2$. См. вар. 1.

3. Нет таких a , при которых неравенство имеет единственное решение.

Задание 11.14. Контрольное задание

Вариант 1

1. а) Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{9+8\sin^2 x - 3\sin 2x}{1+\sin^4 x} &= 3 \Leftrightarrow 9+8\sin^2 x - 3\sin 2x = 8(1+\sin^4 x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 3\sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + 3\sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -8\sin^2 x \cos^2 x + 3\sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{6}(-1)^n + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{12}(-1)^n + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

б) Область допустимых значений: $\begin{cases} z > 0, \\ z \neq 1, \\ 10az > 0. \end{cases}$ В области допустимых

значений уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{2|\lg(10az)|}{\lg z} &= \frac{\lg 100a^2 - \lg \sqrt{1000}}{\lg z} - \frac{1}{2} \lg z \Leftrightarrow 2|\lg(10az)| = \lg \sqrt{10} a^2 - \frac{1}{2} \lg^2 z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10az \geq 1, \\ \lg 100a^2 z^2 - \lg \sqrt{10} a^2 + \frac{1}{2} \lg^2 z = 0, \\ 0 < 10az < 1, \\ -\lg 100a^2 z^2 - \lg \sqrt{10} a^2 + \frac{1}{2} \lg^2 z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10az \geq 1, \\ 2 + \lg a^2 + 2\lg z - \frac{1}{2} - \lg a^2 + \frac{1}{2} \lg^2 z = 0, \\ 0 < 10az < 1, \\ -2 - \lg a^2 - 2\lg z - \frac{1}{2} - \lg a^2 + \frac{1}{2} \lg^2 z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10az \geq 1, \\ \lg^2 z + 4\lg z + 8 = 0, \\ 0 < 10az < 1, \\ \lg^2 z - 4\lg z - 5 - 4\lg a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10az \geq 1, \\ \begin{cases} \lg z = -1, \\ \lg z = -3, \end{cases} \\ 0 < 10az < 1, \\ \lg z = \frac{4 \pm \sqrt{36 + 16\lg a^2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10az \geq 1, \\ \begin{cases} z = \frac{1}{10}, \\ z = \frac{1}{1000}, \end{cases} \\ 0 < 10az < 1, \\ \lg z = 2 \pm \sqrt{9 + 4\lg a^2}. \end{cases}$$

Так как $a < 1$, то для решений $z = \frac{1}{10}$ и $z = \frac{1}{1000}$ не выполняются условия $10az \geq 1$. Значит, они не подходят.

Проверим второе решение $\begin{cases} \lg z = 2 \pm \sqrt{9 + 8\lg a}, \\ 0 < 10az < 1, \end{cases}$ запишем его в виде

$\begin{cases} \lg(10az) = 3 + \lg a \pm \sqrt{9 + 8\lg a}, \\ 0 < 10az < 1. \end{cases}$ Так как для решения необходимо

$9 + 8\lg a \geq 0 \Leftrightarrow \lg a \geq -\frac{9}{8}$, то $3 + \lg a + \sqrt{9 + 8\lg a} > 0$, откуда следует

$10az > 1$, что не подходит в качестве решения. Рассмотрим:
 $3 + \lg a - \sqrt{9 + 8\lg a} < 0 \Leftrightarrow 3 + \lg a < \sqrt{9 + 8\lg a} \Leftrightarrow (3 + \lg a)^2 < 9 + 8\lg a \Leftrightarrow$
 $\lg^2 a - 2\lg a < 0 \Leftrightarrow 0 < \lg a < 2$. Значит, для того чтобы второе выражение было корнем, необходимо $a > 1$. По условию, $a < 1$. Итак, уравнение решений не имеет.

2. а) $a \cdot 2^x + b = b \cdot 2^{-x} + a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \cdot 2^{2x} + (b-a) \cdot 2^x - b = 0,$$

если обозначить $t = 2^x > 0$, то

$$\begin{cases} at^2 + (b-a)t - b = 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Необходимое условие существования двух корней: $a \neq 0$. Если $a \neq 0$, то уравнение квадратное. При каких a и b корни $0 < t_1 < t_2$ (рис. 227)?
 Необходимое и достаточное условие

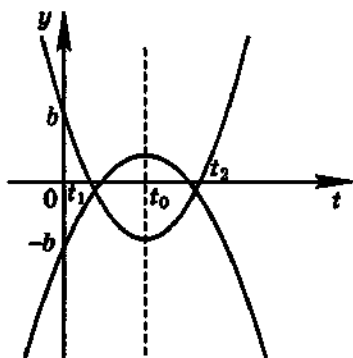


Рис. 227

$$\text{существования } t_1, t_2 \text{ и } 0 < t_1 < t_2 \text{ есть } \begin{cases} D > 0, \\ t_0 > 0, \\ \begin{cases} a > 0, \\ -b > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ -b < 0, \end{cases} \end{cases} \text{ где } D = (b-a)^2 + 4ab -$$

дискриминант, $t_0 = \frac{a-b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы. Итак, условия следующие:

$$\begin{cases} (b-a)^2 + 4ab > 0, \\ \frac{a-b}{2a} > 0, \\ -ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 > 0, \\ \frac{a-b}{2a} > 0, \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -b, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{b}{a} > 0, \\ ab < 0, \end{cases} \text{ так как } ab < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0,$$

значит, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{b}{a} > 0$, поэтому остается два условия: $\begin{cases} ab < 0, \\ a \neq -b. \end{cases}$

$$\text{б) Решения: } \begin{cases} t_1 = \frac{a-b-\sqrt{D}}{2a}, \\ t_2 = \frac{a-b+\sqrt{D}}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{a-b+|a+b|}{2a}, \\ t_2 = \frac{a-b-|a+b|}{2a}, \end{cases} \text{ откуда корни } t=1, \\ t = -\frac{b}{a}, \text{ значит, } x=0, x=\log_2(-\frac{b}{a}).$$

3. а) Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3 y + \frac{\log_3 y}{\log_3 0.5} > 1 \Leftrightarrow \log_3 y \left(1 - \frac{1}{\log_3 2}\right) > 1 \Leftrightarrow \log_3 y \frac{\log_3 2 - 1}{\log_3 2} > 1,$$

$$\text{так как } 0 < \log_3 2 < 1, \text{ то } \log_3 y < \frac{\log_3 2}{\log_3 2 - 1} \Leftrightarrow 0 < y < 3^{\frac{\log_3 2}{\log_3 2 - 1}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < y < 2^{\frac{1}{\log_3 2 - 1}} \Leftrightarrow 0 < y < 2^{\frac{\log_2 3}{2}}.$$

б) Область допустимых значений: $\begin{cases} x \neq 1, \\ x > \log_9 7, \end{cases}$ тогда исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \log_9 7 < x < 1, \\ \log_3(9^x - 6) \leq x, \\ x > 1, \\ \log_3(9^x - 6) \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 7 < x < 1, \\ 9^x - 6 \leq 3^x, \\ x > 1, \\ 9^x - 6 \geq 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 7 < x < 1, \\ (3^x - 3)(3^x + 2) \leq 0, \\ x > 1, \\ (3^x - 3)(3^x + 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 7 < x < 1, \\ x > 1. \end{cases}$$

4. Используем свойство логарифма: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \sqrt{x}^{\log_y(x+1)} + x^{2\log_y(x+1)} &\geq 2x^2 \Leftrightarrow x^{\log_y(x+1)} + x^{\log_y(x+1)} \geq 2x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^{\log_y(x+1)} &\geq 2x^2 \Leftrightarrow x^{\log_y(x+1)} \geq x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(\log_y(x+1)-2) \geq 0, \\ x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Граница области определяется равенствами:

$$\begin{cases} x=1, \\ x=0, \\ x+1=y^2, \Leftrightarrow \\ y=0, \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=0, \\ x=y^2-1 \end{cases}$$

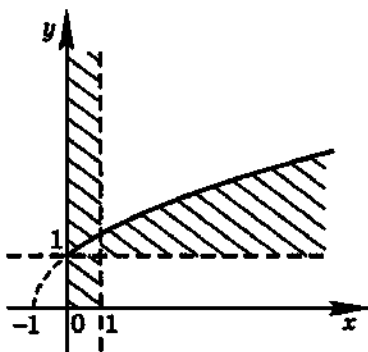


Рис. 228

(рис. 228).

5. В уравнениях перейдем к логарифмам с основанием 2. Тогда имеем

$$\begin{cases} \sin(a-y) + 2\sin x = 0, \\ \frac{1}{2}\log_2(a-y) - 2\log_2 y = \log_2 \frac{\sqrt{3}}{y^2} + \frac{1}{2}\log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(a-y) + 2\sin x = 0, \\ \log_2 \frac{(a-y)}{y^4} = \log_2 \frac{3}{y^4} \cdot x, \Leftrightarrow \\ y > 0, a-y > 0, x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(a-y) + 2\sin x = 0, \\ \frac{(a-y)}{y^4} = \frac{3}{y^4} \cdot x, \\ y > 0, a-y > 0, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(a-y) + 2\sin x = 0, \\ a-y=3x, \\ y > 0, a-y > 0, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x + 2\sin x = 0, \\ a-y=3x, \\ y > 0, a-y > 0, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x \cdot \cos x + \sin x = 0, \\ a-y=3x, \\ y > 0, a-y > 0, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x (4\cos^2 x + 1) = 0, \\ a-y=3x, \\ y > 0, a-y > 0, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{N}, \\ y = a - 3\pi k, \\ y > 0. \end{cases}$$

Так как $y > 0$, то $a - 3\pi k > 0$, $3\pi k < a$, $k \in \mathbb{N}$. Для того чтобы решение было единственным, достаточно, чтобы $3\pi < a \leq 6\pi$.

Вариант 2

1. а) Исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{9 + \cos 2x}{1 + \sin^2 x \cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x - 8 \sin^2 x \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = +\pi + 2\pi k, \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Переходя к логарифмам с основанием a , делая замену $t = \log_a \frac{x}{2}$, получим уравнение $4|t| = 4\log_a 2 - (t + \log_a 2)^2$. Так как $a < 0,1$, $\log_a 2 < 0$, значит, правая часть уравнения отрицательна, а левая при любом t неотрицательна. Уравнение для t решений не имеет. Поэтому не имеет решений и исходное уравнение.

2. а) $\begin{cases} ab < 0, \\ b \neq -a. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 0, \\ x = \log_3(-\frac{b}{a}). \end{cases}$

3. а) Переходя к логарифмам с основанием 2, получим

$$\log_2 y \left(1 + \frac{1}{\log_2 \frac{1}{8}} \right) < 1 \Leftrightarrow \log_2 y (1 - \log_2 2) < 1 \Leftrightarrow \log_2 y \cdot \log_2 \frac{3}{2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y < \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} \Leftrightarrow \log_2 y < \log_{\frac{3}{2}} 3 \Leftrightarrow 0 < y < 2^{\log_{\frac{3}{2}} 3}.$$

б) Область допустимых значений: $\begin{cases} x \neq 1, \\ 4^x - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x > \log_4 3. \end{cases}$ Исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \log_4 3 < x < 1, \\ \log_2(4^x - 2) \leq x, \\ x > 1, \\ \log_2(4^x - 2) > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 3 < x < 1, \\ 4^x - 2 \leq 2^x, \\ x > 1, \\ 4^x - 2 > 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 3 < x < 1, \\ 2^x \leq 2, \\ x > 1, \\ 2^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 3 < x < 1, \\ x > 1. \end{cases}$$

4. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$2y^{\log_x(y+1)} \leq 2y^2 \Leftrightarrow y^{\log_x(y+1)} \leq y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, \\ (y-1)(\log_x(y+1) - 2) \leq 0. \end{cases}$$

Граница области задается уравне-

$$\text{ниями} \begin{cases} y=0, \\ y=1, \\ x=0, \\ x=1, \\ y+1=x^2 \end{cases} \quad (\text{рис. 229}).$$

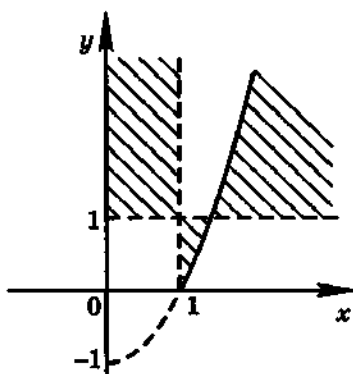


Рис. 229

5. Преобразуем второе уравнение системы:

$$\log_2(a-y) + \log_2(2\sqrt{y}) =$$

$$= \log_2\sqrt{y} + \log_2(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2[(a-y) \cdot 2\sqrt{y}] = \log_2(\sqrt{y} \cdot 2x), \\ x > 0, \\ a-y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow 2(a-y)\sqrt{y} = 2\sqrt{y}x \Leftrightarrow a-y=x,$$

подставим $a-y=x$ в первое уравнение и получим

$$\begin{cases} \sin 3x + 3\sin x = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^3 x = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Так как $a-y=x$, то $\begin{cases} y = a-x, \\ y > 0. \end{cases}$ Так как $y > 0$, то $a - \pi k > 0, \pi k < a, k \in \mathbb{N}$.

Для того чтобы решение было единственным, достаточно, чтобы $\pi < a \leq 2\pi$. Это единственное решение $\begin{cases} x = \pi, \\ y = a - \pi. \end{cases}$

Тема 12

Вещественные и комплексные числа

Задание 12.1. Вещественные числа

Вариант 1

1. Представим дробь $0,1(2)$ в виде обыкновенной дроби. Число $0,0(2)$ можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{10}$ и первым членом $b_1 = 0,02$. Тогда

$$0,0(2) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0,02}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{45}, \quad 0,1(2) = 0,1 + \frac{1}{45} = \frac{1}{10} + \frac{1}{45} = \frac{11}{90}. \quad \text{Сравним } \left(\frac{11}{90}\right)^2 \text{ и } \frac{1}{10},$$

$$\frac{121}{8100} < \frac{1}{10}. \quad \text{Значит, первое число меньше.}$$

2. Предположим, что число $2\sqrt[3]{3}+1$ рационально. Тогда $2\sqrt[3]{3}$ тоже рационально и равно $2\sqrt[3]{3}=\frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые числа. Возведем в куб обе части равенства: $24=\frac{m^3}{n^3} \Leftrightarrow 24n^3=m^3$. В обеих частях последнего равенства целые числа. Левая часть равенства делится на 3. Поэтому и правая часть равенства делится на 3. Так как правая часть есть куб некоторого числа и число 3 — простое, то число m делится на 3, $m=3k$. Тогда $24n^3=27k^3$. Так как числа m и n — взаимно простые, то и числа n и k — взаимно простые. Последнее равенство можно записать, сократив на 3: $8n^3=9k^3$. Так как правая часть делится на 9, то число в левой части тоже делится на 9. Это значит, что n делится на 9, $n=9l$. Тогда $m=3k$ и $n=9l$. Числа m и n имеют общий делитель 3, пришли к противоречию. Предполагали, что m и n — взаимно простые числа. Значит, рассматриваемое число не является рациональным.
3. Нетрудно показать, что $3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}+1)^2$, $3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$. Тогда $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$ — иррациональное число.
4. а) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)$. Откуда имеем $xy=\frac{1}{3}((x+y)^2-\frac{x^3+y^3}{x+y})$, так как $(x+y)$ и (x^3+y^3) — рациональные числа, то число xy — рациональное.
- б) Нет, например, $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$.
5. Нет. Пусть число a^m — рациональное, тогда любое число вида $(a^m)^k$, где m и k — натуральные, тоже рациональное.

Вариант 2

1. $0,1(3)=0,1+\frac{3}{100}+\frac{3}{100\cdot 10}+\frac{3}{100\cdot 10^2}+\dots=\frac{2}{15}$;
 $0,1(12)=\frac{12}{100}+\frac{12}{100\cdot 100}+\frac{12}{100\cdot 100^2}+\dots=\frac{4}{33}$.
- Сравним $(\frac{2}{15})^2$ и $\frac{4}{33} \Leftrightarrow \frac{4}{225}$ и $\frac{4}{33}$. Так как $\frac{4}{225} < \frac{4}{33}$, $(\frac{2}{15})^2 < \frac{4}{33}$, значит, $(0,1(3))^2 < 0,1(12)$.
2. Пусть число $0,5\sqrt[3]{5}-1$ — рациональное. Тогда число $0,5\sqrt[3]{5}$ — тоже рациональное и равно $\frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые числа. Откуда $\sqrt[3]{5}n=2m \Leftrightarrow 5n^3=8m^3$. Так как числа $5n^3$ и $8m^3$ — натуральные и первое делится на простое число 5, то второе число тоже делится на 5, а именно число $m=5k$. Тогда равенство примет вид $5n^3=8\cdot 125k^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^3 = 8 \cdot 25 k^3$, откуда следует, что n делится на 25, $n = 25l$. Имеем $n = 25l$, $m = 5k$, значит, m и n не являются взаимно простыми числами. Пришли к противоречию. Таким образом, искомое число не является рациональным.

3. Да. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$.

4. а) Да. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x-y)((x-y)^2 + 3xy)$. Откуда число $xy = \frac{x^3 - y^3}{x-y} - (x-y)^2$ — рациональное.

б) Нет. Например, $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3} - 2$.

5. Пусть число a^m — рациональное, тогда $a^m \cdot a = a^{m+1}$ — иррациональное. Значит, иррациональных членов бесконечно много.

Задание 12.2. Алгебраическая форма комплексного числа

Вариант 1

1. а) $\frac{(1+i)^2 + (1+i)^3}{(1+i)^8 - (1-i)^2} = (1+i)^2 \frac{1+i+i}{4i-2} = \frac{2i(2+i)}{2(2i-1)} = \frac{2i-1}{2i-1} = 1$.

б) Рассматриваемая сумма — сумма геометрической прогрессии со знаменателем i^7 :

$$1 + i^7 + i^{14} + \dots + i^{70} = \frac{1 - (i^7)^{11}}{1 - i^7} = \frac{1 - i^{77}}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i.$$

в) Выражение можно упростить непосредственным возведением в степень. А можно использовать формулу

$$\begin{aligned} a^5 - b^5 &= (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = (a-b)((a+b)a^3 + a^2b^2 + b^3(a+b)) = \\ &= (a-b)((a+b)(a^2 + b^2) + a^2b^2) = (a-b)((a+b)^2(a^2 - ab + b^2) + a^2b^2) = \\ &= (a-b)((a+b)^2((a+b)^2 - 3ab) + a^2b^2). \end{aligned}$$

$$a-b = 3i-1-3i-1 = -2, \quad a+b = 3i-1+3i+1 = 6i, \quad a \cdot b = -9-1 = -10.$$

Тогда искомое выражение равно

$$\begin{aligned} -2((6i)^2((6i)^2 - 3(-10)) + 100) &= -2(-36(-36+30) + 100) = -2(36 \cdot 6 + 100) = \\ &= -2 \cdot 316 = -632. \end{aligned}$$

г) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^n = (-1)^n$.

д) По теореме Виета $z_1 + z_2 = -1$, $z_1 \cdot z_2 = 1$.

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) = (z_1 + z_2)((z_1 + z_2)^2 - 3z_1 z_2) = -1(1-3) = 2.$$

2. Пусть число $x = t + iz$, где t и z — вещественные числа. Тогда

$$x^2 = t^2 - z^2 + 2iz, \quad |x| = \sqrt{t^2 + z^2}.$$

Подставляя в уравнение x^2 и x , имеем $t^2 - z^2 + 2itz + \sqrt{t^2 + z^2} + 1 = 0$.

Из этого уравнения, отделяя вещественную и мнимую части, имеем систему
$$\begin{cases} t^2 - z^2 + \sqrt{t^2 + z^2} + 1 = 0, \\ 2tz = 0. \end{cases}$$

Если $z=0$, то искомое число $x=t$ — вещественное и уравнение для t $t^2 + |t| + 1 = 0$ имеет отрицательный дискриминант. Вещественных корней нет. Если $t=0$, то $x=iz$ — мнимое число и уравнение для z : $-z^2 + |z| + 1 = 0$, где z — вещественное. Из уравнения: $|z| = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Решение: $|z| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и $z = \pm \frac{1 + \sqrt{5}}{2}i$. Тогда $x = \pm \frac{1 + \sqrt{5}}{2}i$.

3. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\bar{z} = x - iy$ и $z\bar{z} = 1$, откуда $x^2 + y^2 = 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 1. Отношение $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} = \frac{x}{y}$. Ясно, что $\frac{x}{y}$ принимает все возможные значения из $\mathbb{R}$, в том числе и $\frac{x}{y} > 100$.

Вариант 2

1. а) Искомое выражение равно $\frac{-2i + 2i(1+i)}{(1+i)2i - 2i} = \frac{-1 + 1 + i}{1 + i - 1} = \frac{i}{i} = 1$.

б) Искомая сумма — сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = -i^5$:

$$\frac{1 - (-i^5)^{21}}{1 - (-i^5)} = \frac{1 + (i^5)^{21}}{1 + i} = \frac{1 + i^{20} \cdot i}{1 + i} = \frac{1 + (i^2)^{10} \cdot i}{1 + i} = \frac{1 + (-1)^{10} \cdot i}{1 + i} = \frac{1 + i}{1 + i} = 1.$$

в) Выражение вычисляем аналогично варианту 1. Тогда $a + b = 2i - 1 + 2i + 1 = 4i$, $a - b = 2i - 1 - 2i - 1 = -2$, $a \cdot b = (2i)^2 - 1 = -5$.

Искомое выражение равно $-2((4i)^2((4i)^2 + 15) + 25) = -2(16 + 25) = -82$.

г) $\frac{(1-i)^{2n}}{(1+i)^{2n}} = \frac{((1-i)^2)^n}{((1+i)^2)^n} = \left(\frac{-2i}{2i}\right)^n = (-1)^n$.

д) По теореме Виета $z_1 + z_2 = 1$, $z_1 \cdot z_2 = 1$. Тогда

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) = (z_1 + z_2)^2 - 3z_1 z_2 = -2.$$

2. Пусть $x = t + iz$, тогда уравнение примет вид

$$t^2 - z^2 + 2itz - \sqrt{t^2 + z^2} + 1 = 0,$$

откуда получим систему для t и z
$$\begin{cases} t^2 - z^2 - \sqrt{t^2 + z^2} + 1 = 0, \\ 2tz = 0. \end{cases}$$
 Из второго

уравнения следует, что хотя бы одно из неизвестных t и z равно нулю. Пусть $z = 0$, тогда $t^2 - |t| + 1 = 0$, дискриминант этого уравнения

отрицательный, поэтому решений нет. Если $t=0$, то для z имеем $-z^2 - |z| + 1 = 0$, то есть $|z|^2 + |z| - 1 = 0$, $|z| = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |z| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow z = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Откуда $x = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$.

3. Доказательство приведено в вар. 1.

Задание 12.3. Геометрическая форма комплексного числа

Вариант 1

1. а) Уравнение $|z+i|=2$ — уравнение окружности радиуса $r_1=2$ с центром в точке $-i$. $|z+i|=4$ — уравнение окружности радиуса $r_2=4$ с центром в точке $-i$. Тогда область $2 \leq |z+i| \leq 4$ — кольцо. Условие $|\operatorname{Re} z| \geq \sqrt{3}$ задает такие z , что модуль вещественной части числа не меньше $\sqrt{3}$. $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ — модуль мнимой части не превосходит 1. Итак, в искомое множество входят части кольца, ограниченные прямыми $\operatorname{Re} z = -\sqrt{3}$, $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = 1$, $\operatorname{Im} z = -1$ (рис. 230).
- б) $z = 1 - 2z'$, тогда $z - 1 = -2z'$ и $|z - 1| = 2|z'| = 2$, значит, искомое множество точек — окружность радиуса $r = 2$ с центром в точке 1 (рис. 231).

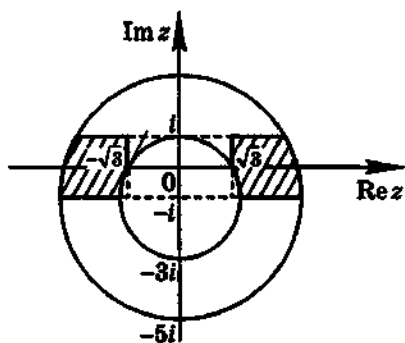


Рис. 230

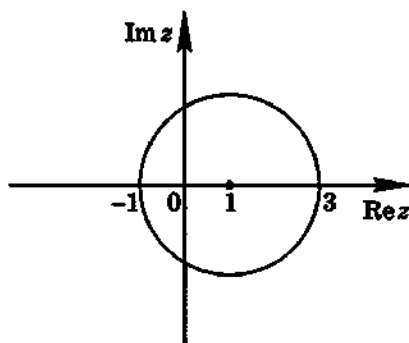


Рис. 231

в) Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$z' = \frac{z}{1-i} = \frac{(1+i)z}{2} = \frac{(1+i)(x+iy)}{2} = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}i(x+y).$$

$$\operatorname{Im} z' = \frac{1}{2}(x+y), \operatorname{Re} z' = \frac{1}{2}(x-y).$$

По условию задачи $|\operatorname{Im} z'| + |\operatorname{Re} z'| \geq 1$. Значит, $\frac{1}{2}|x+y| + \frac{1}{2}|x-y| \geq 1 \Leftrightarrow |x+y| + |x-y| \geq 2$. Границы этой области — прямые $x=1$, $y=1$, $x=-1$, $y=-1$. То есть граница есть квадрат с вершинами $(1; 1)$,

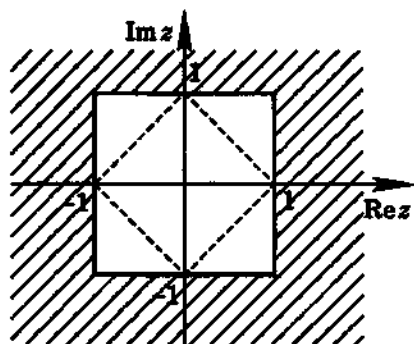


Рис. 232

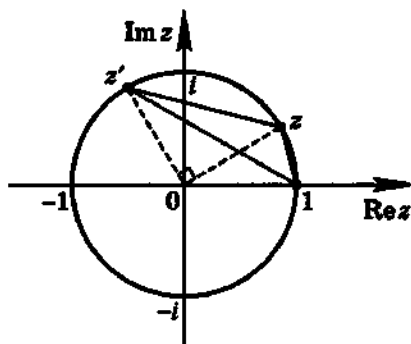


Рис. 233

$(1; -1), (-1; 1), (-1; -1)$. Искомая область — внешность этого квадрата (рис. 232).

Заметим, что граница области для z' — тоже квадрат с вершинами $(0; 1), (0; -1), (1; 0), (-1; 0)$. Область для z' — внешность этого квадрата.

2. а) $|z|=1$ — окружность радиуса 1 с центром $(0; 0)$. Тогда для любой точки z этой окружности точка $iz = z'$ получается поворотом этой точки на 90° против часовой стрелки. $|iz-1|$ — это расстояние между точками iz и $(1; 0)$; $|z-1|$ — расстояние между точками z и $(1; 0)$. Расстояние между точками z и z' равно $\sqrt{2}$. По неравенству треугольника: $|iz-1| + |z-1| \geq \sqrt{2}$ (рис. 233).

б) Так как $|z|=1$ и $|iz-1| \leq |z|+1=2$, то единственная точка, в которой $|iz-1|=2$, есть $z=i$. Так как в точке $z=i$ $|z-1| \neq 0$, то условие задачи не может быть выполнено ни при каких z .

в) $|iz-1|=|iz+i-i|=|i||z+i|$. $|z+i|$ — расстояние от точки z до точки $(-i)$. Учитывая условие, имеем $|z+i|=|z-1|$. Значит, расстояния от точки z до точек $(-i)$ и 1 равны. Такие точки лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $(0; -i)$ и $(1; 0)$. Решениями исходного уравнения будут два значения z , которые получаются в точках пересечения построенного перпендикуляра и окружности $|z|=1$ (рис. 234):

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

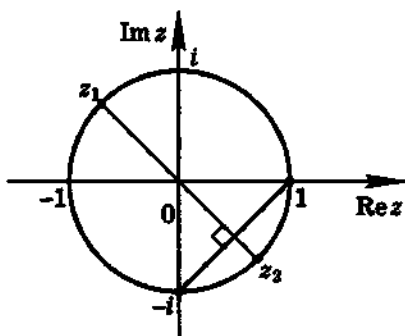


Рис. 234

г) Для любой точки z окружности $|z|=1$ рассмотрим три точки z, iz и 1 . Как было показано в (а), точка iz получается поворотом z на 90° . Искомая сумма есть периметр треугольника с вершинами z, iz и 1 со сторонами $|iz-z|, |z-1|, |iz-1|$. В случае,

когда $z=1$ или $z=-i$, треугольник вырождается и имеет наименьшую сумму, равную $2\sqrt{2}$. $|iz-1|+|z-1|+|iz-z|=|iz-1|+|z-1|+\sqrt{2}$. Надо найти наибольшее значение $|iz-1|+|z-1|$. Это сумма двух сторон треугольника. Рассматриваемый треугольник — вписанный, одна сторона постоянная, поэтому противоположный ей угол тоже постоянный. Надо определить наибольшее значение суммы двух сторон. Покажем, что эти две стороны равны. Пусть фиксированная сторона c , две другие — a и b . Тогда по теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, откуда $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos \alpha$, $(a+b)^2 = c^2 + 2ab(\cos \alpha + 1)$. Так как $\cos \alpha + 1 > 0$, то имеем наибольшее $a+b$ в том случае, когда $2ab$ наибольшее. Известно, что $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ — равенство при $a=b$. Следовательно при $a=b$ периметр наибольший. Так как $a=|iz-1|$, $b=|z-1|$, то случай $a=b$ рассмотрен в пункте (в). Тогда $|iz-1|=|z-1|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-1\right|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Значит, наибольшая сумма равна $2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. а) Искомая область ограничена окружностями $|z+1|=2$, $|z+1|=4$ (центры окружностей — точка -1 , радиусы 2 и 4), прямыми $\operatorname{Im} z = -\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = \sqrt{3}$, $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Re} z = -1$ (рис. 235).

б) $z=1+2z' \Rightarrow z-1=2z' \Rightarrow |z-1|=2$, значит, точки z образуют окружность радиуса 2 с центром в точке 1 (рис. 236).

в) Пусть $z=x+iy$, тогда $\operatorname{Re} z' = \operatorname{Re} \frac{z}{1+i} = \operatorname{Re} \frac{x+iy}{1+i} = \operatorname{Re} \frac{(x+iy)(1-i)}{2} = \frac{1}{2}(x+y)$,

$\operatorname{Im} z' = \operatorname{Im} \frac{z}{1+i} = \operatorname{Im} \frac{(x+iy)(1-i)}{2} = \frac{1}{2}(y-x)$, из условия задачи следует

$\left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{y-x}{2}\right| \leq 1$. Граница этой области — прямые $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$. Область — квадрат с вершинами в точках $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$.

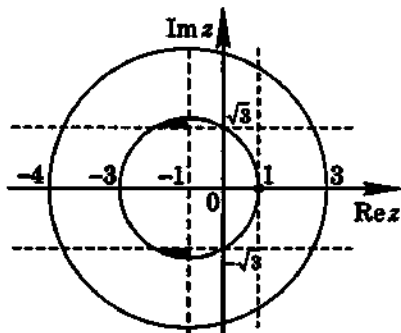


Рис. 235

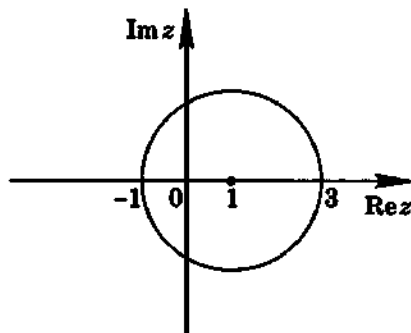


Рис. 236

2. а) Доказательство аналогично вар. 1, только вместо точки (1, 0) надо рассмотреть точку (-1; 0).

б) Так как $|z|=1$, то $|iz+1| \leq |z|+1=2$, то единственная точка, в которой $|iz+1|=2$, есть $z=-i$. Так как в точке $z=-i$ $|z+1| \neq 0$, то условие задачи не может быть выполнено ни при каких z .

в) $|iz+1|=|iz+i \cdot (-i)|=|i||z-i|$, $|z-i|$ — расстояние от точки z до точки i . Учитывая условие, имеем $|z-i|=|z+1|$. Значит, расстояния от точки z до точек i и -1 равны. Такие точки лежат на серединном перпендикуляре к отрезку (0; i) и $(-1; 0)$. Решениями исходного уравнения будут два значения z , которые получаются в точках пересечения построенного перпендикуляра и окружности $|z|=1$:
 $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

г) Рассматриваемая сумма — периметр треугольника с вершинами в точках z , iz и -1 , $|z|=1$. Рассматриваются и вырожденные треугольники при $z=-1$ или $z=i$. Ясно, что, если заменить точку -1 на 1, границы для суммы не изменятся. Последний случай рассмотрен в вар. 1. Значит, решение следующее: наименьшее значение суммы $2\sqrt{2}$, наибольшее значение — $2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$.

Задание 12.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Вариант 1

1. а) Запишем число в тригонометрической форме $-1+i\sqrt{3}=2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$, $1-i=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$. Тогда
 $(-1+i\sqrt{3})^{150}=(2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}))^{150}=2^{150}(\cos\frac{300\pi}{3}+i\sin\frac{300\pi}{3})=2^{150}(\cos 100\pi+i\sin 100\pi)=2^{150} \cdot (1-i)^{1987}=(\sqrt{2})^{1987}(\cos\frac{7 \cdot 1987}{4}\pi+i\sin\frac{7 \cdot 1987}{4})=2^{993} \cdot \sqrt{2}(\cos(3477\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(3477\pi+\frac{\pi}{4}))=2^{993} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(-1-i)$.
 Окончательно имеем $\frac{2^{150}}{2^{993}(-1-i)}=2^{-843} \frac{(-1+i)}{2}=2^{-844}(-1+i)$.

б) $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$, искомая сумма — сумма 12 членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=z$. Тогда сумма равна
 $\frac{1-z^{12}}{1-z}=\frac{1-(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})^{12}}{1-\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}=\frac{1-\cos\frac{48\pi}{3}-i\sin\frac{48\pi}{3}}{1-\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}=\frac{1-\cos 0-i\sin 0}{1-\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}=0$.

2. $z=-\operatorname{ctg}\alpha+i=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+i=\frac{-\cos\alpha+i\sin\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha(\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha))$, таким образом, модуль числа равен $\operatorname{cosec}\alpha$, а аргумент — $\pi-\alpha$.

3. а) $z^5=-1 \Leftrightarrow z^5=\cos\pi+i\sin\pi \Leftrightarrow z=\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя целые значения k , получаем пять различных корней:
 $z_1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, $z_2=\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}$, $z_3=\cos\pi+i\sin\pi$, $z_4=\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}$,
 $z_5=\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}$.

б) Корни рассматриваемого уравнения лежат на окружности $|z|=1$, разность между аргументами соседних корней равна $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ (рис. 237).

в) Сумма корней:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 &= \\ &= \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} + \cos \pi + \\ &+ i \sin \pi + \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} + \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} = \\ &= \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} - 1 + \\ &+ \cos \frac{3\pi}{5} - i \sin \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = 2 \cos \frac{\pi}{5} + 2 \cos \frac{3\pi}{5} - 1 = \\ &= \frac{2(\cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5})}{\sin \frac{\pi}{5}} - 1 = \frac{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} - 1 = \frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} - 1 = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} - 1 = 0 \end{aligned}$$

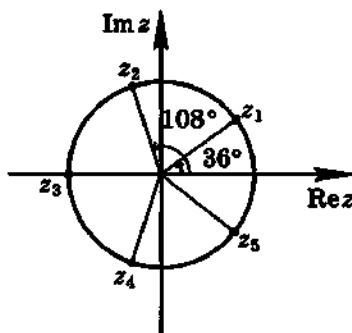


Рис. 237

(рис. 237). Можно вычислить исходную сумму геометрически. Рассмотрим вектора $\vec{Oz_i}$, начало которых совпадает с началом координат, конец — с точками z_i ($i=1, 5$) (предполагается, что углы между векторами последовательно равны). Из геометрии известно, что $\sum_{i=1}^5 \vec{Oz_i} = \vec{0}$. Откуда следует, что для $z_j = x_j + iy_j$, $j=1, 5$, $\sum_{j=1}^5 x_j = 0$, $\sum_{j=1}^5 y_j = 0$, откуда $\sum_{j=1}^5 z_j = 0$.

г) Рассмотрим, чему равно каждое слагаемое суммы

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_4 + z_4 z_5 + z_5 z_1.$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}) = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} + \\ &+ i(\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5}) = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}. \text{ Аналогично,} \end{aligned}$$

$$z_2 z_3 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}, \quad z_3 z_4 = \cos \frac{12\pi}{5} + i \sin \frac{12\pi}{5}, \quad z_4 z_5 = \cos \frac{16\pi}{5} + i \sin \frac{16\pi}{5},$$

$$z_5 z_1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi.$$

Итак, искомая сумма равна

$$\begin{aligned} &\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{12\pi}{5} + i \sin \frac{12\pi}{5} + \cos \frac{16\pi}{5} + i \sin \frac{16\pi}{5} + \\ &+ \cos 2\pi + i \sin 2\pi = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5} - i \sin \frac{3\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} - \\ &- \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} + 1 = -2 \cos \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{3\pi}{5} + 1. \text{ Как показано в пункте (в), по-} \\ &\text{следняя сумма равна нулю. Итак, искомая сумма равна нулю.} \end{aligned}$$

4. Пусть $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, тогда $\frac{(1-i)(1+z)}{(1-z)(1+i)} = \frac{(1-i)^2(1+z)}{2(1-z)} = -i \frac{\cos \varphi + 1 + i \sin \varphi}{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi} =$

$$= -i \frac{(\cos \varphi + 1 + i \sin \varphi)(1 - \cos \varphi + i \sin \varphi)}{(1 - \cos \varphi - i \sin \varphi)(1 - \cos \varphi + i \sin \varphi)} = -i \frac{1 - \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i \sin \varphi (\cos \varphi + 1 - \cos \varphi)}{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} =$$

$$= -i \frac{2i \sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = \frac{2 \sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}.$$

Неравенство в условии примет вид $\frac{2 \sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} \leq 0$, так как условию задачи не могут удовлетворять $z=1$, то $(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi > 0$.

Поэтому $\begin{cases} \sin \varphi \leq 0, \\ \varphi \neq 0, \\ \varphi \neq 2\pi, \end{cases} \Leftrightarrow \pi \leq \varphi < 2\pi$, значит, $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\pi \leq \varphi < 2\pi$.

5. а) $u = \sin 1 + i \cos 1 = \cos(\frac{\pi}{2} - 1) + i \sin(\frac{\pi}{2} - 1)$,

$$v = \cos 1 - i \sin 1 = \cos(-1) + i \sin(-1).$$

Аргументы чисел u и v равны соответственно $\frac{\pi}{2} - 1$ и -1 . Значит, искомый угол равен $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{б) } u^{10} + v^{10} = \cos(5\pi - 10) + i \sin(5\pi - 10) + \cos(-10) + i \sin(-10) = -\cos 10 + i \sin 10 + \cos 10 - i \sin 10 = 0.$$

в) Результаты п. (а) и (б) можно обобщить следующим образом. Пусть $u = r(\sin \varphi + i \cos \varphi)$, $v = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$. Тогда угол AOB равен $\frac{\pi}{2}$ и $u^{10} + v^{10} = 0$. Действительно,

$$u = r(\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)), v = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)). \angle AOB = \frac{\pi}{2} - \varphi + \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$u^{10} + v^{10} = r^{10}(\cos(5\pi - 10\varphi) + i \sin(5\pi - 10\varphi) + \cos(-10\varphi) + i \sin(-10\varphi)) = 0.$$

Вариант 2

1. а) Запишем число в тригонометрической форме:

$$-1 - i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}),$$

$$1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

Тогда исходное выражение примет вид:

$$\frac{2^{150}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})^{150}}{(\sqrt{2})^{1987}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{1987}} = \frac{2^{150}(\cos \frac{600\pi}{3} + i \sin \frac{600\pi}{3})^{150}}{\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{1987}{2}}(\cos \frac{1987\pi}{4} + i \sin \frac{1987\pi}{4})} =$$

$$= \frac{2^{-843}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 200\pi + i \sin 200\pi}{\cos(496\pi + \frac{3\pi}{4}) + i \sin(496\pi + \frac{3\pi}{4})} = \frac{2^{-843}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{-843} \frac{1}{-1 + i} =$$

$$= -2^{-844}(1 + i).$$

б) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$. Искомая сумма равна сумме 12 членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = -z$.

$$\frac{1 - (-z)^{12}}{1 + z} = \frac{1 - z^{12}}{1 + z} = \frac{1 - (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})^{12}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sin \sqrt{3}} = \frac{1 - \cos \frac{60\pi}{3} - i \sin \frac{60\pi}{3}}{\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - 1}{\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.$$

$$2. z = \operatorname{ctg} \alpha - i = \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha (\cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)).$$

$$3. \text{ а) } z^5 = 1 \Leftrightarrow z^5 = \cos 0 + i \sin 0 \Leftrightarrow z = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}; \text{ подставляя целые значения } k, \text{ находим пять различных корней:}$$

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, z_2 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, z_3 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5},$$

$$z_4 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}, z_5 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}.$$

б) Рис. 238.



Рис. 238

$$\text{в) } z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + i(\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}) = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} = 1 - 2 \cos \frac{3\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} = 0.$$

Равенство нулю последней суммы доказано в вар. 1.

$$\text{г) } z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_4 + z_4 z_5 + z_5 z_1 = 0. \text{ Решение аналогично вар. 1.}$$

4. Пусть $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, тогда исходное выражение равно

$$\frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi - i)(-1 + i)}{(\cos \varphi + i \sin \varphi + i)(1 + i)} = \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi - i)(-1 + i)(1 - i)}{(\cos \varphi + i \sin \varphi + i)(1 + i)(1 - i)} \cdot \frac{(\cos \varphi - i \sin \varphi - i)}{(\cos \varphi - i \sin \varphi - i)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(1 - i)^2 (\cos \varphi + i \sin \varphi - i)(\cos \varphi - i \sin \varphi - i)}{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{-2i(\cos^2 \varphi + i \sin \varphi \cos \varphi - i \cos \varphi - \sin \varphi - i \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi - \sin \varphi - i \cos \varphi + \sin \varphi - 1)}{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2} =$$

$$= \frac{2 \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2}. \text{ Значит, надо решить неравенство } \frac{2 \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2} \geq 0,$$

то есть $\cos \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{3\pi}{2}; 2\pi].$

$$5. \text{ а) } u = \sin 2 + i \cos 2 = \cos(\frac{\pi}{2} - 2) + i \sin(\frac{\pi}{2} - 2),$$

$$v = \cos 2 - i \sin 2 = \cos(-2) + i \sin(-2).$$

Так как аргументы чисел u и v в тригонометрической форме равны соответственно $\frac{\pi}{2} - 2$ и -2 , искомым угол равен $\frac{\pi}{2}$.

$$6) u^{10} + v^{10} = \cos(5\pi - 20) + i \sin(5\pi - 20) + \cos(-20) + i \sin(-20) = -\cos 20 + i \sin 20 + \cos 20 - i \sin 20 = 0.$$

в) См. вар. 1.

Задание 12.5. Контрольное задание

Вариант 1

1. Пусть $x = u + iv$, $y = t + iz$, $u, v, t, z \in \mathbb{R}$. Тогда исходную систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} (1+i)(u+iv) + (1-i)(t+iz) = 6, \\ (3+i)(u+iv) + (3-i)(t+iz) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v+t+z=6, \\ u+v+z-t=0, \\ 3u-v+3t+z=8, \\ 3v+u+3z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v+t+z=6, \\ u+z=3, \\ v+t=-2, \\ v+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=0,5, \\ v=-2,5, \\ z=2,5, \\ u=0,5, \end{cases} \text{ откуда } x=0,5-i2,5; y=0,5+i2,5.$$

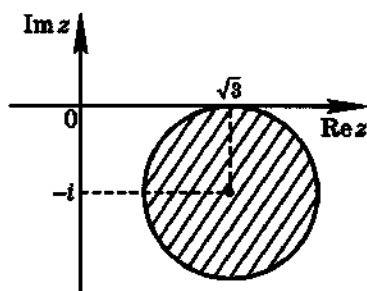


Рис. 239

2. Множество $|z - \sqrt{3} + i| \leq 1$ — круг радиуса 1 с центром в точке $z = \sqrt{3} - i$. Наименьшее значение главного аргумента равно нулю у числа $z = \sqrt{3}$ (рис. 239).

3. Если $a > 0$, то модуль числа равен $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, аргумент $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$$z = a\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

Если $a < 0$, то модуль числа равен $\sqrt{a^2 + a^2} = -a\sqrt{2}$, аргумент $\varphi = \frac{3\pi}{4}$,

$$z = -a\sqrt{2} (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

4. $x = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, $y = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, тогда

$$x^{3n+2} = \cos \frac{4(3n+2)\pi}{3} + i \sin \frac{4(3n+2)\pi}{3} = \cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y^{3n+1} = \cos \frac{2(3n+1)\pi}{3} + i \sin \frac{2(3n+1)\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
 тогда значение искомого выражения равно нулю.

5. Пусть $z = x + iy$, тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

$$z' = \frac{2-z}{z} = \frac{2}{z} - 1 = \frac{2}{x+iy} - 1 = \frac{2(x-iy)}{x^2+y^2} - 1 = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2iy}{x^2+y^2} - 1 = 2(x-iy) - 1,$$

тогда $z' + 1 = 2(x - iy)$, $|z' + 1| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Числа z образуют дугу окружности $|z| = 1$, числа z' образуют дугу окружности $|z' + 1| = 2$.

6. Пусть $z = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, тогда $|z + 1| = \sqrt{(u+1)^2 + v^2}$, и уравнение примет вид $u + iv + a\sqrt{(u+1)^2 + v^2} + i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u + a\sqrt{(u+1)^2 + v^2} = 0, \\ v + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} u + a\sqrt{(u+1)^2 + 1} = 0, \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{(u+1)^2 + 1} = -u, \\ u \leq 0, \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - 1)u^2 + 2a^2u + 2a^2 = 0, \\ u \leq 0, \\ v = -1. \end{cases}$

Дискриминант квадратного уравнения для u равен

$$D = (2a^2)^2 - 4 \cdot 2a^2(a^2 - 1) = 4a^2(2 - a^2).$$

По условию, $a > 2$, поэтому дискриминант меньше нуля. Уравнение решений не имеет. Значит, исходное уравнение тоже не имеет решений.

Вариант 2

1. Пусть $x = u + iv$, $y = t + iz$, тогда для $u, v, t, z \in \mathbb{R}$ имеем систему

$$\begin{cases} u - v + t + z = 6, \\ u + v - t + z = 0, \\ 3u - v + 3t + z = 8, \\ u + 3v - t + 3z = 0. \end{cases} \quad \text{Решая систему, получаем } u = 2, v = 1, t = 2, z = -1$$

и $x = 2 + i$, $y = 2 - i$.

2. Числа z образуют круг радиуса 1 с центром в точке $z = \sqrt{3} + i$. Пусть $A(z')$ — точка на окружности, такая, что OA — касательная к окружности (рис. 240). Из геометрического построения ясно, что аргумент этой точки наибольший,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{\pi}{3}, \text{ модуль числа}$$

z' равен $OA = OB = \sqrt{3}$. Тогда

$$z' = \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Если $a > 0$, то модуль числа равен $\sqrt{2}a$, его аргумент равен $\frac{\pi}{4}$,
 $z = a\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$; если $a < 0$, то

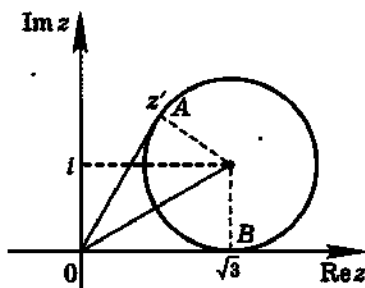


Рис. 240

модуль числа равен $-\sqrt{2}a$, аргумент $\frac{5\pi}{4}$, $z = -a\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$.

Если $a=0$, то тригонометрической формы нет.

4. $x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, $y = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, тогда

$$x^{3n+1} = \cos \frac{4(3n+1)\pi}{3} + i \sin \frac{4(3n+1)\pi}{3} = \cos(4\pi n + \frac{4\pi}{3}) + i \sin(4\pi n + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y^{3n+2} = \cos \frac{2(3n+2)\pi}{3} + i \sin \frac{2(3n+2)\pi}{3} = \cos(2\pi n + \frac{4\pi}{3}) + i \sin(2\pi n + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

тогда значение искомого выражения равно нулю.

5. Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, $z' = \frac{2+z}{z} = \frac{2}{z} + 1$,

$$z' - 1 = \frac{2}{x+iy} = \frac{2(x-iy)}{x^2+y^2} = 2(x-iy), \quad |z' - 1| = 2\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{значит, } |z' - 1| = 2,$$

числа z' образуют дугу окружности.

6. Пусть $z = u + iv$, где $u, v \in \mathbb{R}$, $|z| = u^2 + v^2$. Уравнение принимает вид

$$u^2 + v^2 + 2i(u + iv) + 2a(1 + i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - 2v + 2a = 0, \\ 2u + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (v-1)^2 = 1 - 2a, \\ u = -a. \end{cases}$$

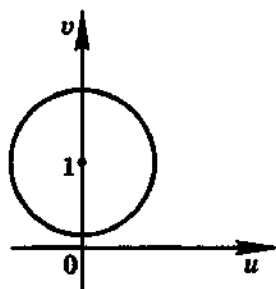


Рис. 241

По условию, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, тогда $0 \leq 1 - 2a \leq 1$, и первое уравнение определяет окружность радиуса $r = \sqrt{1 - 2a}$ с центром в точке $(u; v) = (0; 1)$. Так как по условию $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, то $0 \leq r \leq 1$ (рис. 241).

Тема 13

МНОГОЧАНЫ

Задание 13.1. Действия с многочленами

Вариант 1

1. $P(a) = 1 + a^4 + a^3 + 2a = Q(a)(a^2 + a - 1) + a + 2$, тогда $R(a) = a + 2$, $P(1) = 5$, $Q(1) = 2$, $R(1) = 3$. Значит, утверждение неверно.

2. Будем искать многочлен в виде $Q(x) = x^2 + ax + b$, тогда

$$(2x^2 + 3x + 2)(x^2 + ax + b) - 4x - 5 = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1.$$

Перемножая многочлены в левой части равенства и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой ча-

сти, получим систему уравнений для неизвестных коэффициентов a и b .

$$2x^4 + (3+2a)x^3 + (2+3a+2b)x^2 + (2a+3b-4)x + 2b-5 = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1,$$

$$\begin{cases} 3+2a=1, \\ 2+3a+2b=3, \\ 2b-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2a=1, \\ 3a+2b=1, \\ b=3, \end{cases} \text{ из первого и третьего уравнений}$$

имеем $a=-1$, $b=3$, но эти числа не удовлетворяют второму уравнению. Значит, многочлена $Q(x)$, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

3. Да. Например, x^3+x^2+1 и $-x^3+x^2+1$.

4. Пусть $P(x)$ — искомый многочлен. Тогда $P(1)$ — сумма всех коэффициентов многочлена, считая $1=x^0$ (четная степень), $P(-1)$ — сумма всех коэффициентов при x в четной степени минус сумма всех коэффициентов при x в нечетной степени. Тогда $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$ — есть сумма всех коэффициентов при x в четной степени. Значит, искомая сумма равна $\frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{1+5^{1976}}{2}$.

Вариант 2

1. $P(a) = a^4 - a^3 + a^2 + 2a + 1 = Q(a)(a^2 - a) + 3a + 1$.

Значит, $R(a) = 3a + 1$, $R(1) = 4$, $Q(1) = 2$, $P(1) = 4$. Утверждение задачи неверно.

2. Не существует, задача решается аналогично вар. 1.

3. Да. Например, x^3+x^2-2 и $-x^3+x^2-2$.

4. Сумма равна $\frac{1-3^{1976}}{2}$, см. вар. 1.

Задание 13.2. Делимость с остатком

Вариант 1

1. а) Пусть $P(x) = (x-a)R(x) + a$. Подставляя $x=a$, получим уравнения для a : $P(a) = a \Leftrightarrow 3a^3 + a^2 - 3 = a \Leftrightarrow 3(a-1)(a^2 + a + 1) + a(a-1) = 0 \Leftrightarrow (a-1)(3a^2 + 4a + 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Значит, условию задачи удовлетворяет $a = 1$.

б) Для того чтобы найти частное, разделим $P(x)$ на $x-1$. $P(x) = (x-1)(3x^2 + 4x + 4) + 1$. Частное равно $3x^2 + 4x + 4$.

2. Да, например, $n = 3$. Исходное выражение можно разложить как сумму кубов:

$$(a^2+a+1)^3+(a^2-a+1)^3=(a^2+a+1+a^2-a+1) \cdot ((a^2+a+1)^2-(a^2-a+1) \cdot (a^2-a+1)+(a^2-a+1)^2)=2(a^2+1)((a^2+a+1)^2-((a^2+1)^2-a^2)+(a^2-a+1)^2).$$

Это выражение имеет множитель a^2+1 и поэтому делится на a^2+1 .

3. Пусть при делении $P(x)$ на $(x+1)(x+2)(x+3)$ остаток есть ax^2+ax+a . Тогда $P(x)=Q(x)(x+1)(x+2)(x+3)+ax^2+ax+a$. Отсюда следует, что при делении на $x+2$ остаток равен остатку от деления ax^2+ax+a на $x+2$, то есть $3a$. Определим a из условия, что остаток от деления $P(x)$ на $x+1$ равен 1. Так же, как и при делении на $x+2$, определяем остаток, равный a . Значит, $a=1$. Тогда остаток при делении на $x+2$ равен $3a=3$.
4. Если различные числа a, b, c являются корнями рассматриваемого кубического многочлена, то этот многочлен можно разложить на три множителя, т. е. привести к виду $(x-a)(x-b)(x-c)$. Перемножая эти множители и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x коэффициентам исходного многочлена, получим систему уравнений для a, b, c :

$$\begin{cases} ab-c=0, \\ b^3-ab^2+b^2-c=0, \\ c^3-ac^2+bc-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=ab, \\ b(b^2-ab+b-a)=0, \\ c(c^2-ac+b-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=ab, \\ b(b-a)(b+1)=0, \\ ab(b-1)(a^2b+1)=0. \end{cases}$$

То же самое можно получить, подставляя a, b, c в исходный многочлен. Второе уравнение равносильно совокупности $\begin{cases} b=0, \\ b=a, \\ b=-1. \end{cases}$

Так как числа a, b, c различные, то $b \neq a$. Тогда $\begin{cases} b=0, \\ b=-1. \end{cases}$ Если

$b=0$, то и $c=0$, что не подходит по условию задачи. Если $b=-1$, то из последнего уравнения имеем $a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$. Подходящее решение

$\begin{cases} a=1, \\ b=-1. \end{cases}$ При этом $c=-1$, откуда $c=b$, и, значит, нет различных a, b ,

c , удовлетворяющих условию задачи.

5. Многочлен $(a+b+c)^5$ — многочлен 5-й степени, содержащий слагаемые a^5, b^5, c^5 и $Aa^m b^n c^k$, где $m, n, k \in N, m+n+k=5, A$ — некоторое число. Многочлен $(a+b+c)^5$ можно записать как

$$(a+b+c)^5=a^5+b^5+c^5+Q_1(a,b,c),$$

где $Q_1(a, b, c)$ — многочлен 5-й степени, содержащий слагаемые вида $a^m b^n c^k$. Аналогично,

$$(b+c-a)^5 = b^5 + c^5 - a^5 + Q_2(a, b, c),$$

$$(c+a-b)^5 = c^5 + a^5 - b^5 + Q_3(a, b, c),$$

$$(a+b-c)^5 = a^5 + b^5 - c^5 + Q_4(a, b, c),$$

где Q_2, Q_3, Q_4 — многочлены, содержащие слагаемые вида $a^m b^n c^k$. Тогда исходный многочлен равен

$$a^5 + b^5 + c^5 + Q_1(a, b, c) - b^5 - c^5 + a^5 - Q_2(a, b, c) - c^5 - a^5 + b^5 - Q_3(a, b, c) - \\ - a^5 - b^5 + c^5 - Q_4(a, b, c) = Q_1(a, b, c) - Q_2(a, b, c) - Q_3(a, b, c) - Q_4(a, b, c).$$

Многочлены Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 делятся на abc , поэтому исходный многочлен также делится на abc .

Вариант 2

1. а) См. вар. 1.

$$P(-a) = a \Leftrightarrow -3a^3 + a^2 + 3 = a \Leftrightarrow 3(a^3 - 1) - a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(3a^2 + 2a + 3) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

- б) Частное равно $3x^2 - 2x + 2$.

2. Например, $n = 2$. Действительно,

$$(3a^2 + a - 1)^2 - (a^2 + a + 1)^2 = (3a^2 + a - 1 - a^2 - a - 1) \cdot$$

$$\cdot (3a^2 + a - 1 + a^2 + a + 1) = 2(a^2 - 1)(4a^2 + 2a).$$

3. Остаток равен 7. См. вар. 1.

4. Нет. Если заменить в многочлене b на $-b$, то задача сведется к вар. 1. И так как в вар. 1 нет таких a, b и c , то и в рассматриваемой задаче нет таких a, b, c .

5. Многочлен $(a+b+c)^7$ — многочлен 7-й степени и содержит одночлены вида a^7, b^7, c^7 и $A a^m b^n c^k$, где $m, n, k \in N, m+n+k=7, A$ — некоторое число. Аналогично, многочлены $(b+c-a)^7, (c+a-b)^7, (a+b-c)^7$ состоят из такого же типа слагаемых:

$$(a+b+c)^7 = a^7 + b^7 + c^7 + Q_1(a, b, c),$$

$$(b+c-a)^7 = b^7 + c^7 - a^7 + Q_2(a, b, c),$$

$$(c+a-b)^7 = c^7 + a^7 - b^7 + Q_3(a, b, c),$$

$$(a+b-c)^7 = a^7 + b^7 - c^7 + Q_4(a, b, c),$$

где $Q_1(a, b, c)$, $Q_2(a, b, c)$, $Q_3(a, b, c)$, $Q_4(a, b, c)$ — многочлены 7-й степени, содержащие слагаемые вида $a^m b^n c^k$, $m, n, k \in N$, $m+n+k=7$. Тогда исходный многочлен равен

$$a^7 + b^7 + c^7 + Q_1(a, b, c) - b^7 - c^7 + a^7 - Q_2(a, b, c) - c^7 - a^7 + b^7 - Q_3(a, b, c) - a^7 - b^7 + c^7 - Q_4(a, b, c) = Q_1(a, b, c) - Q_2(a, b, c) - Q_3(a, b, c) - Q_4(a, b, c).$$

Все многочлены Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 делятся на abc , поэтому исходный многочлен тоже делится на abc .

Задание 13.3. Теорема Безу

Вариант 1

1. Так как корень многочлена $3x-2$ равен 1,5, то значение многочлена $3x^3 + a^2x^2 - 4x + 2a$ при $x=1,5$ по теореме Безу равно 10. Значит, $10,125 + a^2 \cdot 2,25 - 6 + 2a = 10 \Leftrightarrow 2,25a^2 + 2a - 5,875 \Leftrightarrow 18a^2 + 16a - 47 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-16 \pm \sqrt{3640}}{36} = \frac{-8 \pm \sqrt{910}}{18} = \frac{-8 \pm \sqrt{91 \cdot 10}}{18}$.

Значит, условию задачи удовлетворяют приведенные выше числа, но они не являются целыми. Нет таких целых a , удовлетворяющих условию задачи.

2. Пусть $m=3k$, $k \in N$, тогда $x^m - y^m = x^{3k} - y^{3k}$. Так как многочлен $a^n - b^n$ делится на $a - b$, многочлен $(x^3)^k - (y^3)^k$ делится на $x^3 - y^3$.
3. Нет. Например, при $a=b=1$ не делится.

Вариант 2

1. Нет таких целых a . См. вар. 1.
2. Пусть $m=4k$, $k \in N$, тогда $x^m - y^m = (x^4)^k - (y^4)^k$ делится на $x^4 - y^4$. Пусть $a=x^4$, $b=y^4$, тогда $a^k - b^k$ делится на $a - b$. Так как значение многочлена $P(a) = a^k - b^k$ при $a=b$ равно нулю, $P(b) = b^k - b^k = 0$.
3. Нет, например при $a=b=1$.

Задание 13.4. Схема Горнера

Вариант 1

1. Используем схему Горнера

	1	$4b$	$6b^2$	$4b^3$	$-b^4$
$-b$	1	$3b$	$3b^2$	b^3	$-2b^4$

$$\text{Тогда } a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - 2b^4.$$

2. Исходное значение многочлена при $x = -2 - i$ равно остатку от деления его на $x + 2 + i$, который можно определить по схеме Горнера

	1	$1 + 2i$	0	$1 + 3i$	0	7
$-2 - i$	1	$-1 + i$	$3 - i$	$-6 + 2i$	$14 + 2i$	$-19 - 18i$

Значит, значение многочлена при $x = -2 - i$ равно $-19 - 18i$.

3. Исходный многочлен $P(x)$ делится на $x - 1$, так как его значение при $x = 1$ равно нулю. Если этот многочлен делится на $(x - 1)^2$, то, значит, его можно представить в виде произведения $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $(n - 1)$. Тогда

$$P'(x) = 2(x - 1)Q(x) + (x - 1)^2 Q'(x),$$

и значение производной $P'(x)$ при $x = 1$ равно нулю, $P'(1) = 0$. И если $P'(1) = 0$, то $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$. Вычислим производную исходного многочлена

$$\begin{aligned} P'(x) &= (n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1)' = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} = \\ &= n(n+1)x^{n-1}(x-1). \end{aligned}$$

Значит, $P'(1) = 0$. Поэтому исходный многочлен делится на $(x - 1)^2$.

Вариант 2

1. По схеме Горнера

	1	$-4b$	$6b^2$	$-4b^3$	$-b^4$
b	1	$-3b$	$3b^2$	$-b^3$	$-2b^4$

$$\text{Тогда } a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4 = (a - b)(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - 2b^4.$$

2. Значение $5 + 22i$. См. вар. 1.

3. Делится, так как $P(x) = (n - 1)x^n - nx^{n-1} + 1$, $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$.

Задание 13.5. Теорема Виета

Вариант 1

1. а) Для первого уравнения по теореме Виета $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{a}$, $\alpha + \beta = \frac{1}{a}$. Пусть корни второго уравнения $x_1 = \alpha^8$, $x_2 = \beta^8$, тогда $x_1 \cdot x_2 = \alpha^8 \beta^8 = \frac{1}{a^8}$ и

$$x_1 + x_2 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = \frac{1}{a}((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{3}{a}\right) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a} - 3\right).$$

Значит, искомое уравнение имеет вид $x^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a} - 3\right)x + \frac{1}{a^3} = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 - (1 - 3a)x + 1 = 0$.

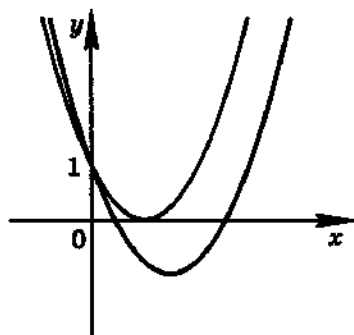


Рис. 242

ни. Если $a < 0$, то при условии $x_0 > 0$, $D > 0$ один корень будет отрицательным. Итак, a удовлетворяют системе

б) Чтобы уравнение $a^2x^2 - (1 - 3a)x + 1 = 0$ имело положительные корни, необходимо, чтобы был неотрицательным дискриминант

$$D = (1 - 3a)^2 - 4a^3 \geq 0.$$

Вершина параболы $y = a^2x^2 - (1 - 3a)x + 1$ $x_0 = \frac{1 - 3a}{2a^3} > 0$. Так как независимо от a

$y(0) = 1$, графики подходящих парабол представлены на рис. 242.

Если $a > 0$, то при условии $x_0 > 0$, $D \geq 0$ уравнение имеет положительные корни.

$$\begin{cases} a > 0, \\ \frac{1 - 3a}{2a^3} > 0, \\ (1 - 3a)^2 - 4a^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 1 - 3a > 0, \\ (4a - 1)(a^2 - 2a + 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < \frac{1}{3}, \\ (4a - 1)(a - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4}.$$

2. Пусть x_0 — корень искомого уравнения, тогда число $(-x_0)$ — корень уравнения $x^{1987} - 1 = 0$. Значит, $(-x_0)^{1987} - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^{1987} + 1 = 0$. Так как последнее уравнение должно выполняться для любого корня искомого уравнения, уравнение имеет вид $x^{1987} + 1 = 0$.

3. Нетрудно проверить, что $z = 0$ не является корнем. Поэтому умножим на z второе уравнение и получим систему

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xyz + z^2(x + y) = 11z, \\ xyz = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 - z, \\ 6 + z^2(6 - z) - 11z = 0, \\ xyz = 6, \end{cases}$$

второе уравнение примет вид $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$. По теореме Виета для корней кубического уравнения z_1, z_2, z_3 запишем:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 6, \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = 11, \\ z_1z_2z_3 = 6. \end{cases}$$

Из этой системы имеем решение $z_1 = 1, z_2 = 2,$

$z_3 = 3$. Тогда решения исходной системы: $x = 2, y = 3, z = 1$ и все перестановки.

Вариант 2

1. а) По теореме Виета для уравнения $ax^2+x+1=0$: $\alpha+\beta=-\frac{1}{a}$, $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{a}$.
 $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = a(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta) = a(-\frac{1}{a})((\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta) = -(\frac{1}{a^2} - \frac{3}{a}) =$
 $= \frac{3a-1}{a^2}$, $\frac{\alpha^2}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} = \alpha \cdot \beta = \frac{1}{a}$. Тогда искомое уравнение имеет вид
 $x^2 + \frac{3a-1}{a^2}x + \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 + (3a-1)x + a = 0$.

б) См. вар. 1. Корни составленного уравнения положительны при условии

$$\begin{cases} D=(3a-1)^2-4a^3 \geq 0, \\ x_0 = \frac{3a-1}{2a^2} > 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(4a^2-5a+1) \leq 0, \\ a > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2(4a-1) \leq 0, \\ a > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=1.$$

При $a=1$ корни положительны и равны.

2. Пусть x_0 — корень искомого уравнения. Тогда $(-x_0)$ — корень уравнения $x^{1987}+1=0$ и, значит, $(-x_0)^{1987}+1=0 \Leftrightarrow x_0^{1987}-1=0$. Так как это верно для любого корня, то искомое уравнение $x^{1987}-1=0$.
3. По теореме Виета для корней кубического уравнения x_1, x_2, x_3 верно $x^3+ax^2+bx+c=0$ и $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b, \\ x_1x_2x_3=-c. \end{cases}$ Если принять x, y, z за

x_1, x_2, x_3 или их перестановки, то x, y, z есть корни кубического уравнения $t^3+6t^2+11t+6=0$, корни которого есть числа $t_1=-1$, $t_2=-2$, $t_3=-3$. Значит, корни исходной системы:

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=-3, \end{cases} \begin{cases} x=-1, \\ y=-3, \\ z=-2, \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-3, \\ z=-1, \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-1, \\ z=-3, \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ y=-1, \\ z=-2, \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ y=-2, \\ z=-1. \end{cases}$$

Задание 13.6. Рациональные корни многочлена

Вариант 1

1. Уравнение имеет целые коэффициенты, поэтому рациональными корнями могут быть числа, у которых числитель есть делитель свободного члена, а знаменатель — делитель старшего коэффициента. В рассматриваемом случае это числа $\pm \frac{1}{2}$. Проверка дала корень $x = \frac{1}{2}$.

2. Легко проверить, что $x = 1$ — корень неравенства. Разложим на множители и получим $(x-1)(x^3+3x^2+5x+6) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2+x+3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.
3. Нетрудно убедиться, что свободный член многочлена равен -7 . Так как многочлен с целыми коэффициентами, то корнями могут быть только числа $\pm 1, \pm 7$. Ни одно из этих чисел не подходит. Значит, многочлен не разлагается на многочлены с целыми коэффициентами.
4. Преобразуем исходную дробь: $\frac{x^4-ax+1}{2x^3-a} = \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{a}{2}x+1}{2x^3-a}$. Если сокращается дробь $\frac{-\frac{a}{2}x+1}{2x^3-a}$, то сокращается и исходная дробь. Если корни числителя и знаменателя дроби $\frac{-\frac{a}{2}x+1}{2x^3-a}$ равны, то дробь можно сократить: $\frac{2}{a} = \sqrt[3]{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 2$.
5. а) Кубическое уравнение имеет хотя бы один вещественный корень.
 б) Рациональными корнями могут быть числа $\pm 3, \pm 1$. Ни одно число не подходит. Нет рациональных корней.

Вариант 2

1. Рациональный корень $x = -\frac{1}{2}$. См. вар. 1.
2. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3+2x+3) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x^2-x+3) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 2]$.
3. Нет. См. вар. 1.
4. $\frac{x^4+ax+1}{2x^3+a} = \frac{1}{2}x + \frac{\frac{a}{2}x+1}{2x^3+a}$. Ясно, что дробь $\frac{\frac{a}{2}x+1}{2x^3+a}$ может быть сокращена только на $\frac{a}{2}x+1$, это означает, что корни числителя и знаменателя должны быть равны: $-\frac{2}{a} = -\sqrt[3]{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 2$.
5. а) Рассмотрим промежуток $x \in [0; 2]$. Значения многочлена на концах промежутка имеют разные знаки, поэтому на этом промежутке имеется хотя бы один корень.
 б) Рациональными корнями могут быть только числа $\pm 3, \pm 1$. Ни одно из этих чисел не подходит. Нет рациональных корней.

Задание 13.7. Комплексные корни многочлена

Вариант 1

1. Так как коэффициенты уравнения — вещественные числа, то второй корень уравнения равен $-i-2$. Значит, многочлен $x^4+8x^3+2x^2-x+5$ делится на $(x-i+2)(x+i+2)=x^2+4x+5$. Тогда уравнение принимает

$$\text{вид } (x^2+4x+5)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\pm i, \\ x=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

2. а) $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, тогда уравнение принимает вид $x^5=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x=\cos(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k)+i\sin(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k), k=0, 1, 2, 3, 4.$

$$\text{б) } y^4+y^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}, \\ y^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}, \\ y=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}, \\ y=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}, \\ y=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{в) } (z-1)^5=(z+1)^5 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1, \\ (\frac{z-1}{z+1})^5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1, \\ (\frac{z-1}{z+1})^5=\cos 0+i\sin 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1, \\ \frac{z-1}{z+1}=\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}, k=0, 1, 2, 3, 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1+\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}}{1-\cos\frac{2\pi k}{5}-i\sin\frac{2\pi k}{5}}, k=1, 2, 3, 4.$$

3. Например, $a=0, a=1$. При $a=0$ многочлен принимает вид $x^{13}+x=0$, то есть $x(x^{12}+1)=0$. Один вещественный корень $x=0$. При $a=1$ $x^{13}+x^3+x+1=0$. Производная $(x^{13}+x^3+x+1)'=13x^{12}+3x^2+1>0$ при $x \in \mathbb{R}$. Значит, многочлен возрастает и больше одного корня иметь не может, и один корень имеется.

Вариант 2

1. $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+2)(3x^2+x-1)=3(x-1-i)(x-1+i) \cdot$
 $\cdot (x+\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{13}}{6})(x+\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{13}}{6})$. Корни $x=1\pm i, x=-\frac{1}{6}\pm i\frac{\sqrt{13}}{6}$.

2. а) $x^5+i=0 \Leftrightarrow x^5=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x=\cos(\frac{3\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k)+i\sin(\frac{3\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k),$
 $k=0, 1, 2, 3, 4.$

$$6) y^4 - y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \\ y^2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \\ y = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}, \\ y = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}, \\ y = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$в) (z-i)^5 = (z+i)^5 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq i, \\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq i, \\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = \cos 0 + i \sin 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq i, \\ \frac{z+i}{z-i} = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5}, k=0, 1, 2, 3, 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i(1 + \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5})}{1 - \cos \frac{2\pi k}{5} - i \sin \frac{2\pi k}{5}}, k=1, 2, 3, 4.$$

3. Например, $a=0$, $a=1$. См. вар. 1.

Задание 13.8. Контрольное задание

Вариант 1

1. Пусть многочлен $P(x)$ делится на $(x-2)(x-3)$. Тогда

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q_1(x),$$

где $Q_1(x)$ — частное. Тогда $P(2)=0$ и $P(3)=0$. И по теореме Безу многочлен $P(x)$ делится на $(x-2)$ и $(x-3)$. Пусть $P(x)$ делится на $(x-2)$, тогда $P(x) = (x-2)Q_2(x)$, где $Q_2(x)$ — частное, некоторый многочлен степени на 1 меньше степени $P(x)$. Пусть $P(x)$ делится еще на $(x-3)$. Тогда, так как $(x-2)$ не делится на $(x-3)$, $Q_2(x)$ делится на $(x-3)$, то есть $P(x) = (x-2)(x-3)Q_3(x)$, $Q_3(x)$ — частное. Получили, что $P(x)$ делится на $(x-2)(x-3)$.

2. Из первого уравнения следует, что

$$(x+y+z)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+xz+yz) = 4.$$

Используя второе уравнение, запишем $2(xy+xz+yz) = 4-6$. Тогда

$$\text{система уравнений сведется к виду } \begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+yz+xz=-1, \end{cases} \text{ Из этой системы } xyz=-2.$$

мы видно, что числа x, y, z удовлетворяют теореме Виета для кубического уравнения $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$, значит, x, y, z — корни этого уравнения. $t^2(t-2) - (t-2) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2-1) = 0 \Leftrightarrow t=1, t=-1, t=2$. Тогда решения x, y, z равны $(1; -1; 2)$ и все перестановки этих чисел.

3. а) Проверим подстановкой $x = i$: $-i + (1+i) + i - 1 - i = 0$. Да, $x = i$ является корнем.

б) Разложим кубический многочлен на множители:

$$x^3 - (1+i)x^2 + x - 1 - i = (x-i)(x^2 - x + 1 - i),$$

тогда уравнение примет вид $(x-i)(x^2 - x + 1 - i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = i, \\ x = -1, \\ x = 1+i. \end{cases}$

4. $p'(x) = ax^3 - 6ax + 8$, $q'(x) = x - a$. Если $p'(x)$ делится на $q'(x)$, то по теореме Безу $p'(a) = 0 \Leftrightarrow a^4 - 6a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 4)(a^2 - 2) = 0$. $a = \pm 2$ — целые. Проверка показала, что при этих a $p(x)$ не делится на $q(x)$. Не существует таких a .

5. а) Многочлен $x^{11} - 1$ можно представить в виде произведения (числа 1, $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ — корни): $x^{11} - 1 = (x-1)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{10})$.

Тогда при $x = -1$ имеем $-2 = -2(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_{10})$. Откуда следует, что искомое произведение равно 1. $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_{10}) = 1$.

б) Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ — отличные от 1 корни уравнения $x^{2n+1} - 1 = 0$. Тогда $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_{2n}) = 1$.

Вариант 2

1. См. вар. 1.

2. Решение (1; -1; -2) и все перестановки этих чисел. См. вар. 1.

3. а) Да. Можно проверить подстановкой.

б) $x_1 = -i$, $x_2 = i$, $x_3 = -1 - i$.

4. Нет. См. вар. 1.

5. а) Произведение равно 1.

б) Рассмотрим уравнение $x^{2n+1} + 1 = 0$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ — корни, отличные от -1. Тогда $(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_{2n}) = 1$. Действительно, многочлен $x^{2n+1} + 1 = (x+1)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{2n})$. Подставим $x = 1$. Имеем $(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_{2n}) = 1$.

Тема 14

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Задание 14.1. Уравнения первой степени с одним неизвестным

Вариант 1

1. а) Если $a \neq 0$, то решение $x = \frac{1+a}{a}$, если $a = 0$, то решений нет.

б) $x > 0$, если $\frac{1+a}{a} > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

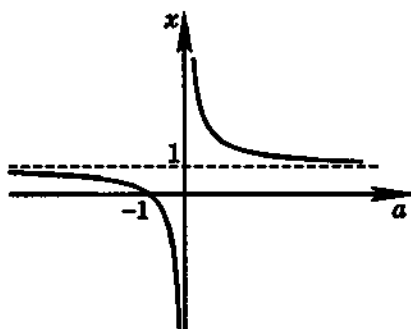


Рис. 243

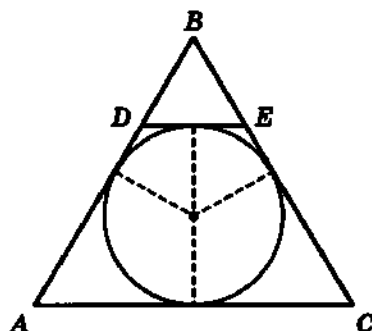


Рис. 244

$$в) |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1+a}{a} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+a}{a} - 1 \leq 0, \\ \frac{1+a}{a} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} \leq 0, \\ \frac{1+2a}{a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -\frac{1}{2}].$$

$$г) x(a) = \frac{1+a}{a} = 1 + \frac{1}{a} \text{ (рис. 243).}$$

2. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ x \neq 1, \\ a^2(x-1) = x-1+a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ x \neq 1, \\ (a^2-1)x = a^2+a-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ x \neq 1, \\ (a-1)(a+1)x = (a-1)(a+2). \end{cases}$$

Если $a = 1$, то решения $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Если $a = -1$ или $a = 0$, то решений нет. Если $a \neq \pm 1, a \neq 0$, то $x = \frac{a+2}{a+1}$. Проверим, когда $x = \frac{a+2}{a+1} = 1$. Оказывается, что нет таких a , при которых $x = 1$. Значит, все утверждения верны.

3. Рассмотрим треугольник ABC , где $AB = BC = 1, AC = a$ (рис. 244). Пусть $DE \parallel AC$. Так как трапеция описанная, то $AD + EC = DE + AC$ (суммы противоположных сторон равны). Треугольники ABC и DBE подобны. Значит, $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}, BC = BE + EC$. Подставляя AC и BC , получим $\frac{DE}{a} = \frac{BE}{1}, 1 = BE + EC$. Так как $AB = BC, BD = BE$, имеем

$$AD = EC. \text{ Итак, получим систему } \begin{cases} 2EC = DE + a, \\ \frac{DE}{a} = BE, \\ BE + EC = 1, \end{cases} \text{ подставим } EC \text{ из}$$

$$\text{первого уравнения в третье } \begin{cases} EC = \frac{DE}{2} + \frac{a}{2}, \\ DE = aBE, \\ BE + \frac{DE}{2} + \frac{a}{2} = 1, \end{cases} \text{ откуда для } DE \text{ получим}$$

уравнение $DE = a(1 - \frac{a}{2} - \frac{DE}{2}) \Leftrightarrow DE = \frac{a(2-a)}{a+2}$. Выясним, при каких a выполняется $0 < DE < a \Leftrightarrow 0 < \frac{a(2-a)}{a+2} < a \Leftrightarrow 0 < \frac{2-a}{2+a} < 1 \Leftrightarrow 0 < 2-a < 2+a \Leftrightarrow 0 < a < 2$. Так как в треугольнике ABC две стороны равны 1, то по неравенству треугольника $a < 2$. Значит, для всех $0 < a < 2$, при которых существует треугольник с двумя сторонами, равными 1, и третьей стороной a , отрезок $DE = \frac{a(2-a)}{a+2}$.

Вариант 2

1. а) Если $a = 0$, то решений нет, если $a \neq 0$, то $x = -\frac{a+1}{a}$.

$$б) x = -\frac{a+1}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{a+1}{a} > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

$$в) |x| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a+1}{a} \geq 1, \\ -\frac{a+1}{a} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a+1}{a} \leq 0, \\ \frac{1}{a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq a < 0, \\ a > 0, \end{cases} \text{ следовательно,}$$

условию удовлетворяют $a \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$г) x(a) = -1 - \frac{1}{a} \text{ (рис. 245).}$$

2. Исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} a \neq -2, \\ x \neq 0, \\ (a+3)x = 2(a+2) - 5. \end{cases}$$

Если $a = -2$, $a = -3$, $a = \frac{1}{2}$, уравнение решений не имеет. Если $a \neq -2$, $a \neq -3$, $a \neq \frac{1}{2}$, $x = \frac{2a-1}{a+3}$. Число $a = \frac{1}{2}$ получилось из условия, что $x = \frac{2a-1}{a+3} = 0$ и что из допустимых значений $x \neq 0$.

3. Пусть в треугольнике ABC $AB = BC = a$, $AC = 1$, $DE \parallel AC$. Так как в трапецию можно вписать окружность (описанный четырехугольник), то $AD + EC = DE + AC$. Треугольники ABC и DBE подобны,

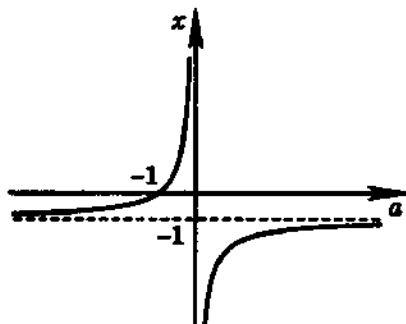


Рис. 245

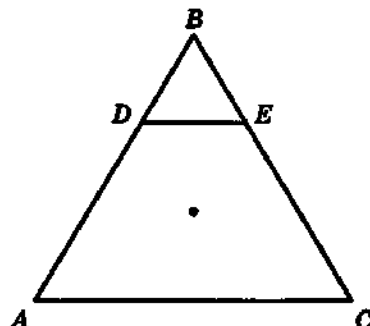


Рис. 246

поэтому $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$, $AD = EC$. Кроме этого $BE = BC - EC = a - EC$, тогда подставляя это выражение для BE в пропорцию, имеем $\frac{DE}{1} = \frac{a - EC}{a}$, откуда $DE \cdot a = a - EC$. Так как из равенства сумм противоположных сторон треугольника следует, что $2EC = DE + 1$, то имеем систему

$$\begin{cases} 2EC = DE + 1, \\ DE \cdot a = a - EC. \end{cases}$$

Нетрудно решить эту систему линейных уравнений: $DE = \frac{2a-1}{2a+1}$. По условию, $0 < DE < AC$, поэтому определим, при каких a это неравенство выполняется. $0 < \frac{2a-1}{2a+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < 2a-1 < 2a+1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$. Именно при $a > \frac{1}{2}$ существует предполагаемый треугольник. Значит, для всех $a > \frac{1}{2}$ $DE = \frac{2a-1}{2a+1}$.

Задание 14.2. Неравенства первой степени с одним неизвестным

Вариант 1

1. а) $ax - 1 < 0 \Leftrightarrow ax < 1$. Решения: если $a = 0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$; если $a < 0$, $x > \frac{1}{a}$.

б) Подставим в рассматриваемое неравенство $x = 2$, тогда для a имеем $2a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$. Значит, для $a < \frac{1}{2}$ неравенство имеет решение $x = 2$.

в) Ясно, что $a = 0$ не удовлетворяет условию. Из пункта (а) следует, что $a < 0$ тоже не удовлетворяет условию. Если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$ и если $\frac{1}{a} \leq 1$, то все $x < \frac{1}{a}$ меньше 1. Откуда $a \geq 1$.

г) Обратимся к пункту (а). $a = 0$ удовлетворяет условию задачи. Если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$ и если $\frac{1}{a} \geq 1$, то все $|x| < 1$ — решения. Это возможно при $0 < a \leq 1$. Если $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$ и если $\frac{1}{a} \leq -1$, то все $|x| < 1$ — решения. Значит, $0 > a \geq -1$. Итак, условию задачи удовлетворяют $a \in [-1; 1]$.

2. Исходное неравенство можно записать в виде

$$\frac{-(a+3)y + 4 - 3a}{(a-1)y} > 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 3a - (a+3)y}{y} > 0.$$

Корень числителя при $a \neq -3$ $y_1 = \frac{4-3a}{a+3}$, корень знаменателя $y_2 = 0$.

Если $y_1 = y_2$,

$$\frac{\overbrace{\hspace{1cm}}^{\hspace{1cm}}}{y_1 = 0} \rightarrow y$$

что достигается при $a = \frac{4}{3}$, неравенство примет вид $\frac{-y(a+3)}{y} > 0$, оно не имеет решений, так как $a > 0$. Если $y_1 < y_2$,

$$\frac{\overbrace{\hspace{1cm}}^{\hspace{1cm}}}{y_1 \quad 0 \quad y}$$

то есть $\frac{4-3a}{a+3} < 0$, тогда $a > \frac{4}{3}$, решение $y \in \left(\frac{4-3a}{a+3}; 0\right)$. Если $y_1 > y_2$,



то есть $1 < a < \frac{4}{3}$, то решение $y \in \left(0; \frac{4-3a}{a+3}\right)$.

3. Так как $a \geq 0$, то из неравенства следует, что решения могут быть только положительными: $x > 0$. Тогда $x+5 > 0$ и $|x+5| = x+5$. Исход-

ное неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} x+5 < ax, \\ x > 0, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 < ax, \\ x > 0, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Система имеет решение при $x > \frac{5}{a-1}$, $a > 1$.

Вариант 2

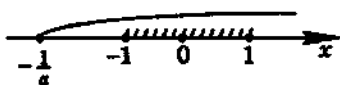
1. а) $ax+1 > 0 \Leftrightarrow ax > -1$. Если $a = 0$, то решение $x \in \mathbb{R}$; если $a > 0$, то $x > -\frac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x < -\frac{1}{a}$.

б) Подставим в исходное неравенство $x = 2$, тогда $2a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$. Значит, при $a > -\frac{1}{2}$, $x = 2$ является решением.

в) Из пункта а) ясно, что условию пункта в) могут удовлетворять решения $x > -\frac{1}{a}$ при $a > 0$. Любое решение неравенства будет больше -1 при условии $-1 \leq -\frac{1}{a} \Leftrightarrow a \geq 1$.

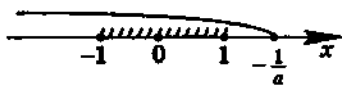
г) Рассмотрим решение этого неравенства в пункте (а). Ясно, что $a = 0$ удовлетворяет условию задачи. Удовлетворяют условию задачи также следующие a :

случай $a > 0$



$$\begin{cases} -\frac{1}{a} \leq -1, \\ a > 0, \end{cases}$$

случай $a < 0$



$$\begin{cases} -\frac{1}{a} \geq -1, \\ a < 0. \end{cases}$$

Решая эти неравенства, получим $a \in (0; 1]$, $a \in [-1; 0)$.

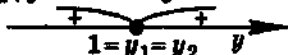
Итак, условию задачи удовлетворяют $a \in [-1; 1]$.

2. Исходное неравенство равносильно

$$\frac{(a+3)y+2a-7}{(a-1)(y-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(a+3)y-7+2a}{y-1} < 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Корень числителя при $a \neq -3$ $y_1 = \frac{7-2a}{a+3}$, корень знаменателя $y_2 = 1$. Возможны три случая.

$$1) y_1 = y_2, \text{ то есть } \frac{7-2a}{a+3} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$



В этом случае неравенство не имеет решений.

$$2) y_1 > y_2 \Leftrightarrow \frac{7-2a}{a+3} > 1 \Leftrightarrow 7-2a > a+3 \Leftrightarrow 1 < a < \frac{4}{3}. \text{ Решение } y \in \left(1; \frac{7-2a}{a+3}\right).$$



$$3) y_1 < y_2 \Leftrightarrow a > \frac{4}{3}. \text{ Решение } y \in \left(\frac{7-2a}{a+3}; 1\right).$$



3. Исходное неравенство можно решить, используя графики. Пусть $y_1(x) = |-x+5| = |x-5|$, $y_2(x) = ax$. Графики $y = y_2(x)$ при $a \leq 0$ —

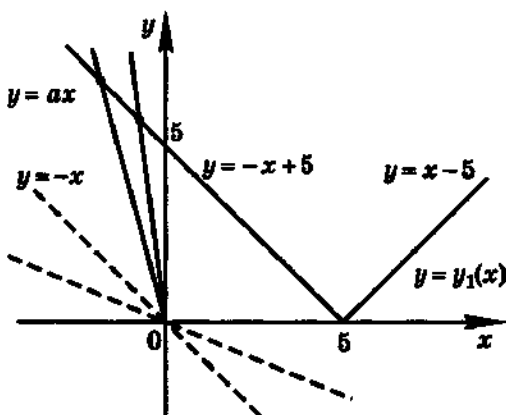


Рис. 247

прямые с тангенсом угла наклона a , проходящие через начало координат (рис. 247). Ясно, что если тангенс угла наклона прямой равен a , $-1 \leq a < 0$, то график $y = y_1(x)$ ниже графика $y = y_2(x)$ при любых x . Значит, решение $x \in \mathbb{R}$. Если $a = 0$, то решение $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 5$ ($x = 5$ — общая точка графиков $y_2(x)$ и $y_1(x)$ при $a = 0$). Если $a < -1$, то графики $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются в точке x_1 : $ax_1 = -x_1 + 5$, $x_1 = \frac{5}{1+a}$, и решение $x > x_1$, то есть $x > \frac{5}{1+a}$.

Задание 14.3. Линейные системы уравнений с двумя неизвестными

Вариант 1

1. а) Вычислим определители этой системы.

$$\Delta = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} a^3 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^4 - 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - a^3.$$

Если $\Delta \neq 0$, то есть $a \neq \pm 1$, то система имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a^4 - 1}{a^2 - 1} = \frac{(a^2 - 1)(a^2 + 1)}{a^2 - 1} = a^2 + 1$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a - a^3}{a^2 - 1} = -a$.

Если $a = \pm 1$, то $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Система имеет бесконечно много решений $\begin{cases} y \in \mathbb{R}, \\ x = 1 - ay. \end{cases}$

Возможно другое решение. Подставим x из второго уравнения в первое и получим для y $(1-a^2)y = a^3 - a \Leftrightarrow (1-a^2)y = -a(1-a^2)$. Ясно, что при $a = \pm 1$ уравнение имеет бесконечно много решений $y \in \mathbb{R}$. Для любого y $x = 1 - ay$. Если $a \neq \pm 1$, система имеет единственное решение $\begin{cases} x = a^2 + 1, \\ y = -a. \end{cases}$

б) Если вычесть из первого уравнения второе, получим $x + 4y = 3$, добавим третье уравнение $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ x + 4y = a. \end{cases}$ Ясно, что решение системы

существует только при $a = 3$. Тогда $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{5}, \\ y = \frac{1}{5}. \end{cases}$

2. а) Прямые пересекаются при условии, что система $\begin{cases} 3x + 2ay = 1, \\ 3(a-1)x - ay = 1 \end{cases}$

имеет решение. Определители этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2a \\ 3(a-1) & -a \end{vmatrix} = -3a - 6a(a-1) = -6a^2 + 3a,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a - 2a = -3a, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3(a-1) & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3(a-1) = 6 - 3a.$$

Система имеет единственное решение при $\Delta \neq 0$, то есть $3a - 6a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, a \neq \frac{1}{2}$. Значит, если $a \neq 0, a \neq \frac{1}{2}$, прямые пересекаются.

Другое решение следующее. Систему $\begin{cases} 3x + 2ay = 1, \\ 3(a-1)x - ay = 1 \end{cases}$ подста-

новкой x из первого уравнения во второе приводим к виду $\begin{cases} x = -\frac{1}{1-2a}, \\ y = \frac{2-a}{a(1-2a)}. \end{cases}$ Единственное решение существует при $a \neq 0$ и $a \neq 0,5$.

При этом исходные прямые пересекаются.

б) Прямые совпадают, если коэффициенты при x и y соответственно равны $\begin{cases} 3 = 3(a-1), \\ 2a = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ a = 0, \end{cases}$ нет решений. Ни при каких a прямые не совпадают.

в) Прямые параллельны, если коэффициенты при x и при y пропорциональны $\frac{3}{3(a-1)} = \frac{2a}{-a}, -3a = 6a(a-1) \Leftrightarrow a = 0, a = \frac{1}{2}$.

3. При решении данной задачи удобно использовать графики. Если $a = 0$, то система принимает вид $\begin{cases} |x| + y = 0, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$ — единственное решение. Если $a \neq 0$, то исходная система равносильна

системе $\begin{cases} y = a - |x|, \\ y = 1 - \frac{1}{a}x. \end{cases}$ Приведем графики первого и второго урав-

нений. График $y = a - |x|$ — два перпендикулярных луча с началом $M(0; a)$. График $y = 1 - \frac{1}{a}x$ — прямая с тангенсом угла наклона $-\frac{1}{a}$ и проходящая через точку $N(0; 1)$. Рассмотрим различные случаи расположения графиков.

1) $0 < a < 1$ (рис. 248а). 2) $a > 1$ (рис. 248б). 3) $-1 < a < 0$ (рис. 248в). 4) $a \leq -1$ (рис. 248г). 5) $a = 1$ (рис. 248д).

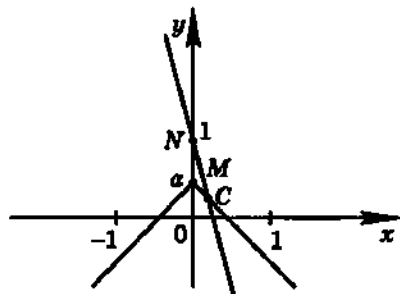


Рис. 248а

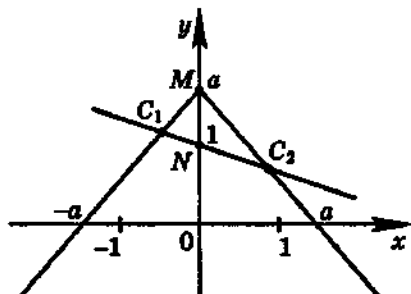


Рис. 248б

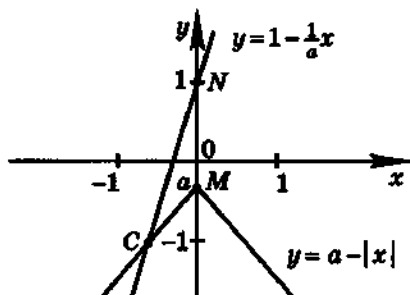


Рис. 248в

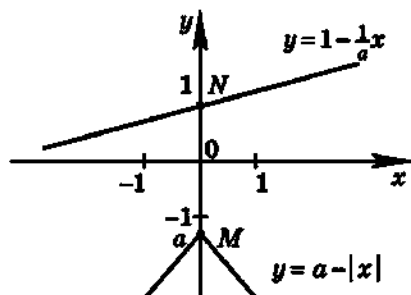


Рис. 248г

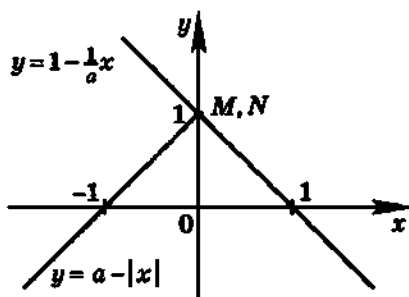


Рис. 248д

Случай 1. Если $0 < a < 1$, то тангенс угла наклона $-\frac{1}{a} < -1$ и угол наклона прямой $y = 1 - \frac{1}{a}x$ меньше $\frac{3}{4}\pi$ и больше $\frac{\pi}{2}$. Система имеет единственное решение, так как графики пересекаются в точке C .

Случай 2. Если $a > 1$, то $-1 < -\frac{1}{a} < 0$, вершина графика $y = a - |x|$ M находится выше точки N , угол наклона прямой $y = 1 - \frac{1}{a}x$ находится в пределах $(\frac{3}{4}\pi; \pi)$. Графики пересекаются в двух точках C_1, C_2 . Система имеет два решения.

Случай 3. $-1 < a < 0$. Система имеет одно решение.

Случай 4. $a \leq -1$. Графики не пересекаются. Система не имеет решений.

Случай 5. $a = 1$. Лучи графиков $y = 1 - \frac{1}{a}x$ и $y = a - |x|$ совпадают. Система имеет бесконечно много решений.

Случай 6. $a = 0$. Система имеет одно решение $x = y = 0$.

Итак, система имеет единственное решение при $a \in (-1; 1)$.

Вариант 2

1. а) Систему можно решить так же, как в вар. 1. С другой стороны, заметим, что если поменять x и y местами, получим систему вар. 1. Поэтому, используя решение вар. 1, получим: если $a \neq \pm 1$, то система

имеет единственное решение $\begin{cases} y = a^2 + 1, \\ x = -a. \end{cases}$ Если $a = \pm 1$, то система имеет бесконечно много решений $\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y = 1 - ax. \end{cases}$

б) Система имеет решение только при $a = 3$: $x = \frac{1}{5}, y = \frac{11}{5}$.

2. Если $a \neq 0, a \neq \frac{1}{2}$, прямые пересекаются. Если $a = 0, a = \frac{1}{2}$, прямые параллельны. Нет таких a , при которых прямые совпадают.
3. Решим эту систему не с помощью графиков, как это сделано в аналогичной системе вар. 1, а подстановкой $y = a - |x|$ во второе уравнение. Тогда получим для x уравнение $x - a|x| = a - a^2$. Раскрывая

модуль, получим совокупность систем $\begin{cases} x > 0, \\ x(1-a) = a - a^2, \\ x < 0, \\ x(1+a) = a - a^2, \end{cases}$ Ясно, $\begin{cases} x = 0, \\ a - a^2 = 0. \end{cases}$

что надо отдельно рассмотреть случаи $1-a=0, 1+a=0, a-a^2=0$. Если $a=0$, то система имеет единственное решение. Если $a=1$, решений бесконечно много. Если $a=-1$, то нет решений. Если $a \neq \pm 1, a \neq 0$,

то уравнению удовлетворяют такие x , что
$$\begin{cases} x > 0, \\ x = \frac{a-a^2}{1-a} = a, \\ x < 0, \\ x = \frac{a-a^2}{1+a}. \end{cases}$$
 Для того

чтобы уравнение имело единственное решение, необходимо и достаточно (при $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$), чтобы произведение возможных решений было положительно: $a \cdot \frac{a-a^2}{1+a} > 0$. Тогда одно из решений исключается условиями $x > 0$ или $x < 0$. $a \cdot \frac{a-a^2}{1+a} > 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot \frac{(1-a)}{1+a} > 0$, то есть $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. Итак, уравнение имеет единственное решение при $a \in (-1; 1)$.

Задание 14.4. Линейные системы уравнений с многими неизвестными

Вариант 1

1. а) Для решения системы используем метод Гаусса. Получим из первого уравнения выражение для x и подставим его в другие. Тогда

$$\begin{cases} x = \frac{2+5t-z+4y}{2}, \\ 2(5t+2-z+4y)-7y-z-8t=-5, \\ 5(5t+2-z+4y)-18y+2z-23t=3, \\ 2+5t-z+4y-3y+z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+5t-z+4y}{2}, \\ y-3z+2t=-9, \\ 2y-3z+2t=-7, \\ y+4t=-2, \end{cases}$$

исключим из второго уравнения y и подставим выражение для него

в третье и четвертое
$$\begin{cases} x = \frac{2+5t-z+4y}{2}, \\ y = -9+3z-2t, \text{ из третьего уравнения полу-} \\ 3z-2t=11, \\ 3z+2t=7, \end{cases}$$

чим $z = \frac{2t+11}{3}$ и подставим его в четвертое уравнение, получим $4t = -4$.

Отсюда вычисляем $t = -1$, подставляем во все другие уравнения. Затем вычисляем $z = 3$, подставляем в первое и второе уравнения. Из второго уравнения $y = 2$, из первого $x = 1$. Значит, решение системы $(x, y, z, t) = (1, 2, 3, -1)$.

- б) Методом Гаусса можно получить равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 2. \end{cases}$$

Ясно, что последние два уравнения несовместны. Значит, система не имеет решений.

2. Необходимым условием несовместности системы является равенст-

$$\text{во нулю определителя } \Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 =$$

$=(a-1)^2(a+2)$. Значит, надо проверить значения $a=1$, $a=-2$. При $a=1$ все уравнения системы равносильны. Поэтому система имеет бесконечно много решений. Пусть $a=-2$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} -2x + y + z = -2, \\ x - 2y + z = 4, \\ x + y - 2z = -8, \end{cases} \text{ если сложить все уравнения системы, то получим}$$

$0 = -6$. Это означает, что система не имеет решений.

Другое решение. Вычтем из первого и второго уравнений третье.

$$\text{Тогда получим равносильную систему } \begin{cases} (a-1)x - (a-1)z = a(1-a^2), \\ (a-1)y - (a-1)z = a^2(1-a), \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$$

Ясно, что при $a=1$ система имеет бесконечно много решений. Пусть

$$a \neq 1. \text{ Тогда имеем } \begin{cases} x - z = -a(1+a), \\ y - z = -a^2, \\ x + y + az = a^2. \end{cases} \text{ Подставим } x \text{ и } y \text{ из первого и}$$

второго уравнений в третье. Тогда третье уравнение примет вид $(2+a)z = 3a^2 + a$. Нетрудно сделать вывод, что при $a=-2$ уравнение не имеет решений. При $a=-2$ исходная система также не имеет решений.

3. Методом исключения (Гаусса) получим равносильную систему

$$\begin{cases} x + y + z = k, \\ 2y + 3z = 3k, \\ y + 2z = 3k, \\ z = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = k, \\ 2y + 3z = 3k, \\ z = -3k, \\ z = 4k. \end{cases} \text{ Третье и четвертое уравнения сов-}$$

местны только при $k=0$. Решение при $k=0$ $x=y=z=0$. Это решение единственно.

Вариант 2

1. а) Ответ $(1, 0, -1, 0)$. Можно решить методом исключения (Гаусса).

б) Если исключить x_1 из первого уравнения и подставить во второе и третье, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases} \text{ По-}$$

следние два уравнения этой системы несовместны. Значит, система не имеет решений. Не имеет решений также и исходная система.

2. Необходимое условие несовместности системы — равенство нулю

определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^3 + 3a + 2 = (a+1)^2(a-2)$. Опреде-

литель равен нулю при $a=2$, $a=-1$. Если $a=-1$, исходная система

равносильна системе $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=1, \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1, \\ 0=0, \\ 0=0, \end{cases}$ которая имеет бес-

конечно много решений. При $a=2$ $\begin{cases} -2x+y+z=-2, \\ x-2y+z=4, \\ x+y-2z=-8. \end{cases}$ Если сложить

все три уравнения, получим $0=-6$, это уравнение не имеет реше-
ний, поэтому при $a=2$ система не имеет решений.

Без использования определителей решение таково: равносильная

система имеет вид $\begin{cases} -(a+1)x + (a+1)z = -a(1-a^2), \\ -(a+1)y + (a+1)z = a^2(1+a), \\ x+y-az = -a^3. \end{cases}$ Ясно, что при $a=-1$

система имеет бесконечно много решений. Пусть $a \neq -1$. Тогда имеем

$\begin{cases} -x+z=a(a-1), \\ -y+z=a^2, \\ x+y-az=-a^3. \end{cases}$ Подставим x и y из первого и второго уравнений в

третье, оно примет вид $(2-a)z = 2a^2 - a - a^3$. Уравнение, а также ис-
ходная система не имеют решений при $a=2$.

3. Решение единственно только при $k=0$.

Задание 14.5. Система неравенств с несколькими неизвестными

Вариант 1

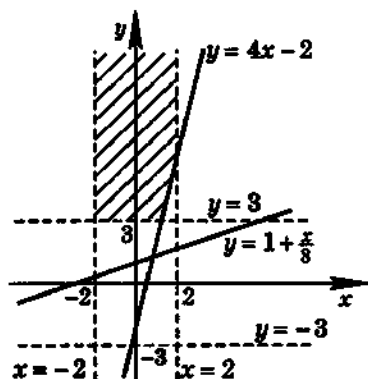


Рис. 249

1. а) Исходное условие можно записать

в виде $\begin{cases} y \geq 1 + \frac{x}{8}, \\ y \geq 4x - 2, \\ |x| \leq 2, \\ |y| > 3. \end{cases}$ Граница множества

точек состоит из отрезков прямых, ко-
торые представлены на рис. 249.

б) $\begin{cases} |x| \geq 1, \\ \log_x y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x > 0, x \neq 1, \\ y > 0, \\ (x-1)(y-x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

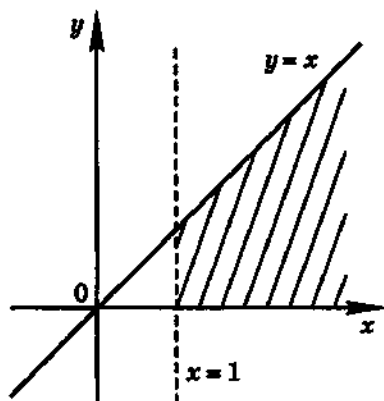


Рис. 250

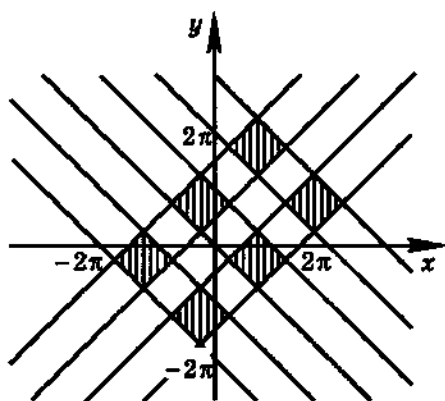


Рис. 251

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ y > 0, \\ (x-1)(y-x) \leq 0. \end{cases} \quad \text{Границы множества точек — отрезки прямых} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=0, \\ y=x \end{cases}$$

(рис. 250).

$$\text{в) } \begin{cases} \sin(x+y) > 0, \\ \cos(x-y) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x+y < \pi+2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2}+2\pi l < x-y < \frac{3\pi}{2}+2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{рис. 251}).$$

г) При $0 < x \leq 1$ $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, при $0 < y \leq 1$ $0 < \arccos y \leq \frac{\pi}{2}$. Функция $z = \sin t$ возрастает на $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 1 \geq x > 0, \\ 1 \geq y > 0, \\ \sin(\arcsin x) < \sin(\arccos y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ 0 < y \leq 1, \\ x < \sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ 0 < y \leq 1, \\ x^2 < 1 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ 0 < y \leq 1, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

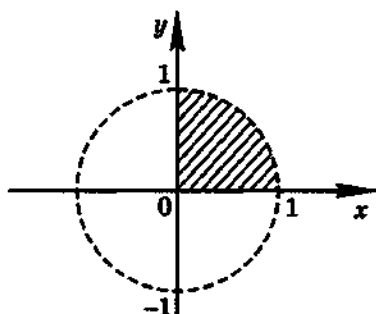


Рис. 252

Искомое множество — четверть круга радиуса 1 с центром (без границы) (рис. 252).

2. Например, $\begin{cases} x - y + z - 1 \leq 0, \\ x + y - z + 1 \leq 0. \end{cases}$

Вариант 2

1. а) Исходное условие равносильно следующему

$$\begin{cases} y \leq 3x - 3, \\ y \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, \\ |x| > 3, \\ |y| < 2. \end{cases}$$

Границей множества точек являются отрезки прямых. Нарисуем эти прямые и определим множество (рис. 253).

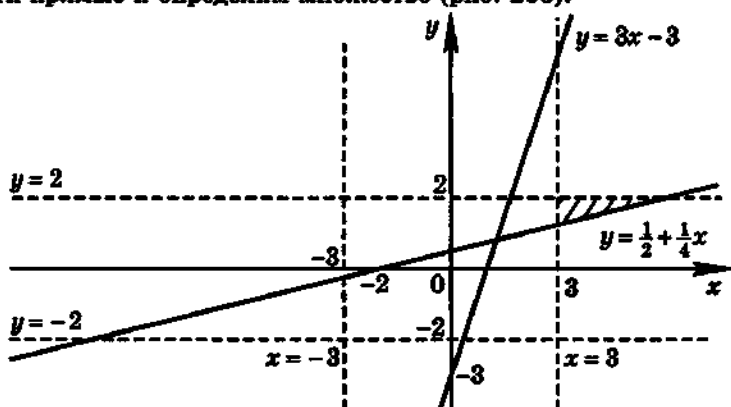


Рис. 253

б) Исходное условие равносильно следующему

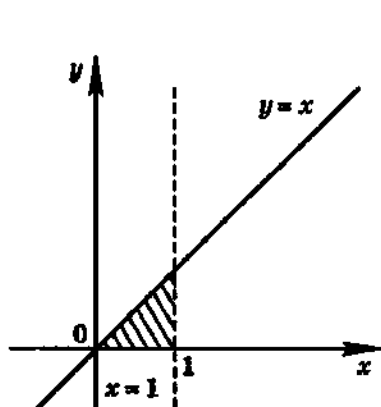


Рис. 254

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ y > 0, \\ (x-1)(y-x) \geq 0, \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ y > 0, \\ y < x \end{cases} \quad (\text{рис. 254}).$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sin(x-y) < 0, \\ \cos(x+y) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi + 2\pi k < x - y < 2\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi l < x + y < \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(рис. 255).

г) Аналогично вар. 1, получим множество, определяемое условиями

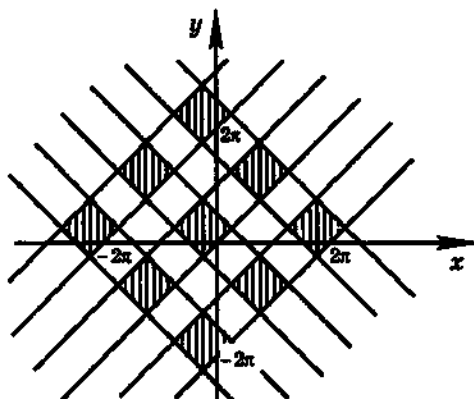


Рис. 255

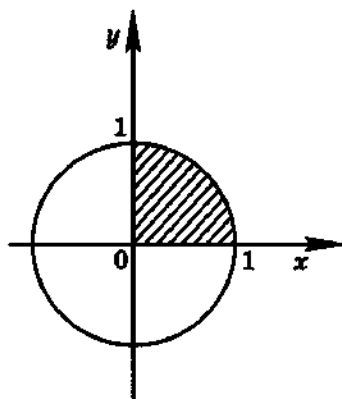


Рис. 256

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1, \\ 0 < x < 1, \\ 0 < y < 1 \end{cases} \quad (\text{рис. 256}).$$

2. Например, $\begin{cases} -x + y + z - 1 \leq 0, \\ -x - y - z + 1 \leq 0. \end{cases}$

Задание 14.6. Метод интервалов

Вариант 1

1. а) Исходное неравенство равносильно следующему $-\frac{(x-1)^3(x+1)^4}{x^2(x^4+x^2+1)} \leq 0$.

Так как $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, последнее неравенство равносильно $\frac{(x-1)^3(x+1)^4}{x^2} \geq 0$. Корни числителя и знаменателя $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$.



Решение: $\begin{cases} x = -1, \\ 1 \leq x < \infty \Rightarrow x \in [1; +\infty). \end{cases}$

- б) Исходное неравенство равносильно следующему

$$|a|^4 - 1 + |a| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|a|^2 + 1) + |a| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

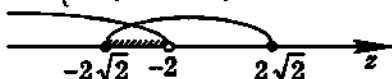
$\Leftrightarrow (|a| - 1)[(|a| + 1)(|a|^2 + 1) + 1] \geq 0$. Так как выражение в квадратных скобках при любом a больше нуля, последнее неравенство равносильно $|a| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \geq 1$, $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

в) Исходная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} \frac{1}{2z+4} - \frac{1}{z-3} < 0, \\ (z-2\sqrt{2})(z+2\sqrt{2}) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-z-7}{2(z+2)(z-3)} < 0, \\ -2\sqrt{2} \leq z \leq 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Так как $z \leq 2\sqrt{2} < 3$, то $z-3 < 0$ и $-z-7 < 0$, поэтому система равно-

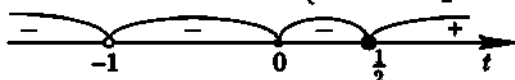
сильна следующей $\begin{cases} \frac{1}{z+2} < 0, \\ -2\sqrt{2} \leq z \leq 2\sqrt{2}. \end{cases}$



Решение: $z \in [-2\sqrt{2}; -2)$.

2. Область определения функции

$$\begin{cases} \frac{t^5+t^2}{-2t^3-t+1} \geq 0, \\ -2t^3-t+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2(t^3+1)}{2t^2+t-1} \leq 0, \\ 2t^2+t-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2(t+1)(t^2-t+1)}{2(t+1)(t-\frac{1}{2})} \leq 0, \\ t \neq -1, t \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2}{2(t-\frac{1}{2})} \leq 0, \\ t \neq -1. \end{cases}$$



Итак, область определения функции: $t \in (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{1}{2})$.

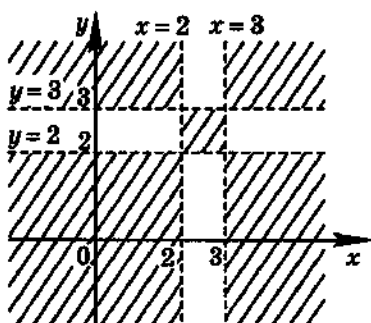


Рис. 257

3. Исходное условие равносильно следующему условию

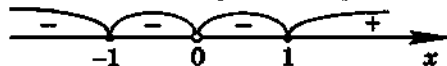
$$\frac{(x-2)(x-3)}{(y-2)(y-3)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ (y-2)(y-3) > 0, \\ (x-2)(x-3) < 0, \\ (y-2)(y-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty), \\ y \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty), \\ x \in (2; 3), \\ y \in (2; 3) \end{cases} \quad (\text{рис. 257}).$$

Вариант 2

1. а) Неравенство равносильно следующему $\frac{(x-1)^3(x+1)^6}{x^4(x^4-x^2+1)} \leq 0$. Так как

$x^4-x^2+1 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, неравенство равносильно $\frac{(x-1)^3(x+1)^6}{x^4} \leq 0$.



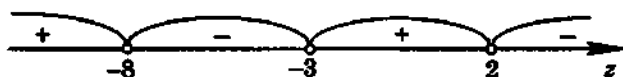
Решение: $\begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 1. \end{cases}$

б) Исходное неравенство равносильно следующему неравенству

$$(|a|^2 + 1)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (|a|^2 + 1 + 2)(|a|^2 + 1 - 2) < 0 \Leftrightarrow |a|^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |a| < 1.$$

в) Система неравенств равносильна следующей системе

$$\begin{cases} \frac{1}{2z+6} - \frac{1}{z-2} > 0, \\ (z-2\sqrt{3})(z+2\sqrt{3}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-z-8}{2(z+2)(z-3)} < 0, \\ z \leq -2\sqrt{3}, \\ z \geq 2\sqrt{3}. \end{cases} \quad \text{Решим первое неравенство.}$$

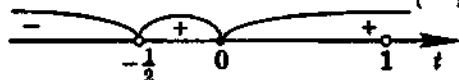


Итак, система принимает вид

$$\begin{cases} z < -8, \\ -3 < z < 2, \\ z \leq -2\sqrt{3}, \\ z \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow z < -8.$$

2. Область определения все t , удовлетворяющие неравенству

$$\frac{-t^5 + t^2}{-2t^2 + t + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2(t^3 - 1)}{2t^2 - t - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2(t-1)(t^2+t+1)}{2(t-1)(t+\frac{1}{2})} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 1, \\ \frac{t^2}{t+\frac{1}{2}} \geq 0. \end{cases}$$



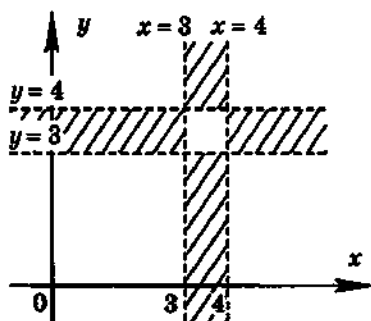
Область определения функции: $t \in (-\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Исходное условие равносильно следующему условию

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(y-3)(y-4)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-3) < 0, \\ (y-4)(y-3) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ y > 4, \\ y < 3, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-3) > 0, \\ (y-4)(y-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < 3, \\ 3 < y < 4 \end{cases}$$



(рис. 258).

Рис. 258

Задание 14.7. Квадратные уравнения с параметром

Вариант 1

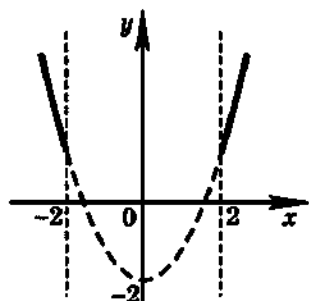


Рис. 259

1. а) Дискриминант уравнения $D = a^2 - 4$. Уравнение имеет решения, если $D \geq 0$, то есть $|a| \geq 2$. Тогда сумма квадратов корней

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2.$$

Использовали теорему Виета,

$$x_1x_2 = 1, \quad x_1 + x_2 = a.$$

б) График суммы $y = a^2 - 2$ — часть параболы для $|a| \geq 2$ (рис. 259).

2. Рассматриваемое уравнение при $a = 0$ является линейным $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. При этом уравнение имеет единственное решение. Если $a \neq 0$, то для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю дискриминант $D = (a+1)^2 - 4a^2(a+1) = 0$.

$$(a+1)(a+1-4a^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}. \end{cases}$$

Целое $a = -1$. Итак, ответ: при $a = 0$, $a = -1$ уравнение имеет единственное решение.

3. Если x_0 — решение системы, то x_0 — и решение разности этих уравнений, откуда $(a-1)x_0 = a-8$. Это уравнение при $a \neq 1$ имеет решение $x_0 = \frac{a-8}{a-1}$. Подставим это значение x_0 во второе уравнение. Тогда $a^3 - 24a + 72 = 0$. Можно подобрать целый корень уравнения $a = -6$ и разложить выражение на множители $(a+6)(a^2 - 6a + 12) = 0$. Других корней нет. Значит, система имеет решение при $a = -6$.
4. Исходное уравнение равносильно следующему уравнению

$$\frac{2ax+1+x^2}{x(x+a)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \quad x \neq -a, \\ x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}. \end{cases}$$

Если дискриминант $a^2 - 1 < 0$, решений нет. $a^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$. Проверим, при каких a $x = 0$ и $x = -a$.

$$1) -a \pm \sqrt{a^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \pm a = \sqrt{a^2 - 1} \begin{cases} \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 = a^2 - 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ a^2 = a^2 - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset.$$

2) $-a = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$. При этих значениях a нет решений. Итак, решение: при $|a| > 1$ $x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$.

5. При $a = 0$ корень уравнения $x = -1$. Если $a \neq 0$, то решим задачу графически. График квадратного трехчлена — парабола с вершиной $x_0 = -\frac{1}{2a}$. Одно из условий для того, чтобы уравнение имело корни,

$$|x| \leq 1, -1 < x_0 < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{2a} < 1 \Leftrightarrow |a| > \frac{1}{2}.$$

Также необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным $D = 1 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$. Итак, из двух

неравенств имеем
$$\begin{cases} |a| > \frac{1}{2}, \\ a \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{1}{2}.$$

На рисунке изображены графики подходящих парабол (рис. 260). Еще одно условие $\begin{cases} y(-1) \leq 0, \\ y(1) \leq 0, \end{cases}$ которое можно

учесть подстановкой $x = \pm 1$ в квадратный трехчлен, приводят к $\begin{cases} a \leq 0, \\ a + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \leq -2$. Итак, при $a \leq -2$ и $a = 0$ корни $|x| \leq 1$.

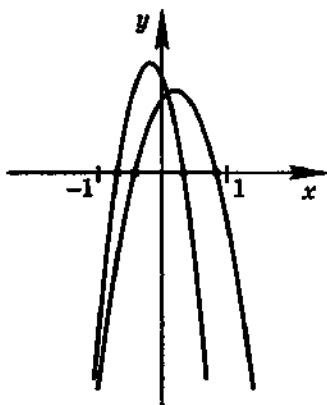


Рис. 260

Вариант 2

1. а) См. вар. 1.

$$x_1 x_2 = 1, x_1 + x_2 = -a, x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2 \text{ при } D = a^2 - 4 \geq 0.$$

Итак, $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2$ при $|a| \geq 2$.

б) См. вар. 1. Тот же график.

2. Единственное решение только при $a = 0$ и дискриминанте $D = 0$. $D = (a+1)^2 - 4a^2(a+1) = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a+1-4a^2) = 0 \Leftrightarrow a = -1, a = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

Таким образом, целые значения a : $a = 0, a = -1$.

3. Если заменить x на $-x$, задача сводится к вар. 1. Система имеет решение при $a = -6$.

$$4. \frac{ax-1}{x(a-x)} = -1 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2ax-1}{x(a-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, x \neq a, \\ x^2 - 2ax + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 4a^2 - 4 \geq 0, \\ x \neq 0, x \neq a, \\ x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}. \end{cases}$$

Проверим, при каких a $x = 0$ и $x = a$.

$$1) x=0 \Leftrightarrow a \pm \sqrt{a^2-1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-1}=\pm a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2=a^2-1, \\ a < 0, \\ a^2=a^2-1. \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset.$$

$$2) x=a \Leftrightarrow a=a \pm \sqrt{a^2-1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-1}=0 \Leftrightarrow a=\pm 1. D=4a^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \geq 1. \text{ Итак, уравнение имеет решение } x=a \pm \sqrt{a^2-1} \text{ при } |a| \geq 1.$$

5. При $a=0$ $x=1$. Если $a \neq 0$, то $|x| \geq 1$ при условии, что дискриминант $D \geq 0 \Leftrightarrow 1-4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$. Кроме того, вершина параболы

$$x_0 < -1 \text{ либо } x_0 > 1. \text{ Так как } x_0 = \frac{1}{2a}, \begin{cases} x_0 < -1, \\ x_0 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2a} < -1, \\ \frac{1}{2a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\frac{1}{2}; 0), \\ a \in (0; \frac{1}{2}). \end{cases}$$

С учетом дискриминанта множество a уменьшилось: $\begin{cases} a \in (-\frac{1}{2}; 0), \\ a \in (0; \frac{1}{4}]. \end{cases}$

Существует еще одно условие.

1) $a > 0$ (рис. 261).

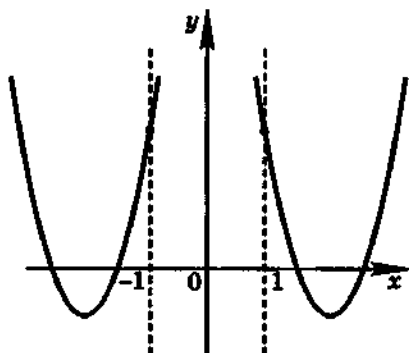


Рис. 261

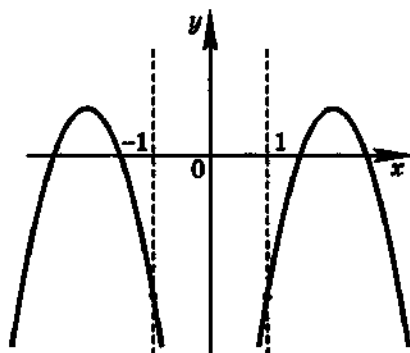


Рис. 262

Значения трехчлена в точках $x=\pm 1$ должны быть больше нуля

$$\begin{cases} y(-1)=a+2 \geq 0, \\ y(1)=a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 0.$$

2) $a < 0$ (рис. 262).

Значения трехчлена в точках $x=\pm 1$ должны быть меньше нуля

$$\begin{cases} y(-1)=a+2 \leq 0, \\ y(1)=a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -2.$$

$$\text{Итак, объединяя все условия, имеем} \quad \begin{cases} a \in (-\frac{1}{2}; 0), \\ a \leq -2, \\ a \in (0; \frac{1}{4}], \Leftrightarrow a \in [0; \frac{1}{4}], \\ a > 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

Задание 14.8. Квадратные неравенства с параметром

Вариант 1

1. При $a=1$ неравенство принимает вид $2 > 0$, значит, оно верно при всех $x \in \mathbb{R}$. При $a=-1$ неравенство оказывается линейным, поэтому оно не может быть верно при всех x . При $a \neq \pm 1$ имеем квадратное неравенство. Как известно, такое квадратное неравенство, когда значения трехчлена при всех x больше нуля, может быть только при положительном значении старшего коэффициента и в случае отсутствия корней, т. е.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ D = 4(a-1)^2 - 8(a^2-1) < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < -1, \\ -4a^2 - 8a + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < -1, \\ a^2 + 2a - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < -1, \\ (a+3)(a-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < -1, \\ a > 1, \\ a < -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, условию задачи удовлетворяют $\begin{cases} a \geq 1, \\ a < -3. \end{cases}$

2. Если $a=0$, то решение $x \geq -1$. Если $a > 0$ и дискриминант $D \leq 0$, то решение $x \in \mathbb{R}$.

Если $a > 0$ и дискриминант $D > 0$, то решение $\begin{cases} x \leq x_1 = \frac{-1-\sqrt{D}}{2a}, \\ x \geq x_2 = \frac{-1+\sqrt{D}}{2a}. \end{cases}$

Если $a < 0$ и дискриминант $D > 0$, то решение $x_2 \leq x \leq x_1$.

Решив неравенство $D > 0$, запишем ответ: 1) $a=0$, решение $x \geq -1$;

2) $a \in (0; \frac{1}{4})$, $\begin{cases} x \leq \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}, \\ x \geq \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}; \end{cases}$ 3) $a < 0$, решение $\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a} \leq x \leq \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$;

4) $a \geq \frac{1}{4}$, решение $x \in \mathbb{R}$.

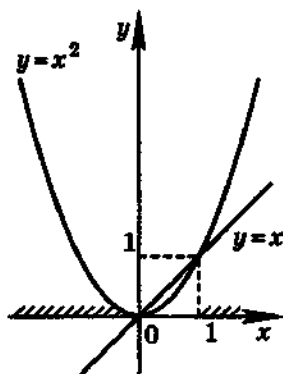


Рис. 263

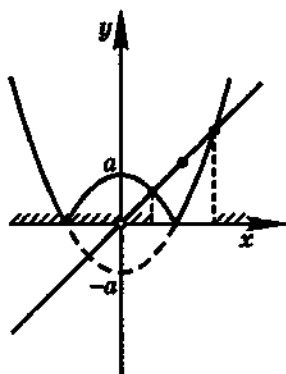


Рис. 264

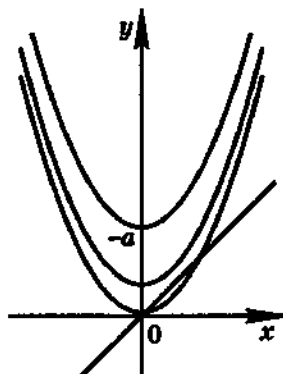


Рис. 265

3. Представим графически левую и правую части неравенства:

- 1) $a = 0$ (рис. 263);
- 2) $a > 0$ (рис. 264);
- 3) $a < 0$ (рис. 265).

В случае $a \geq 0$ решения неравенства не образуют один промежуток. В случае $a < 0$ такие решения возможны. Если парабола не имеет общих точек с прямой $y = x$, то решения образуют один промежуток $x \in \mathbb{R}$. Все подходящие параболы находятся выше параболы, которая касается прямой $y = x$. Значит, надо определить, к какой параболы $y = x^2 - a$ является касательной прямая $y = x$. Пусть x_0 — точка касания, тогда $y(x_0) = x_0^2 - a$ — ордината касания, тангенс угла наклона $y' = 2x_0$, и так как в то же время тангенс равен 1 ($\alpha = 45^\circ$), то можно вычислить x_0 , $2x_0 = 1$, откуда $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0^2 - a = x_0$. Получаем значение $a = x_0^2 - x = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. Итак, если значения $a < -\frac{1}{4}$ (парабола выше), то решения неравенства $|x^2 - a| > x$ есть $x \in \mathbb{R}$ (один промежуток).

4. Представим графически левую и правую части неравенства. На рис. 266а сплошной линией проведены лучи прямых $y = 3 - |x - a|$

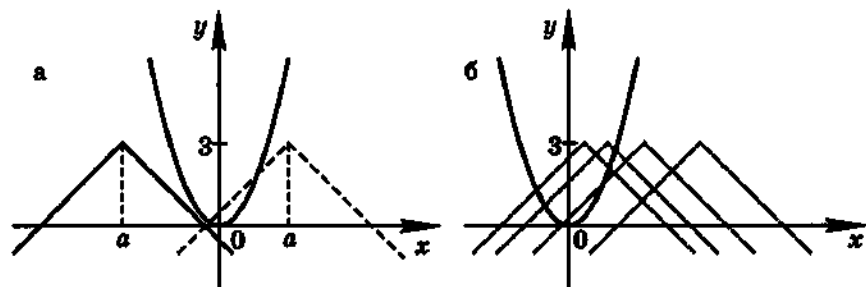


Рис. 266

при $a < 0$, пунктирной — лучи прямых $y = 3 - |x - a|$ при $a > 0$. Если $a > 0$, то среди решений исходного неравенства обязательно имеются положительные решения (рис. 266б). Если $a \leq 0$, то ордината графика $y = 3 - |x - a|$ в точке $x = 0$ $y = 3 + a$. Так как в точке $x = 0$ ордината параболы $y = 0$, то в случае $3 + a > 0$ неравенство имеет и положительные решения. Имеем систему $\begin{cases} a < 0, \\ 3 + a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow -3 < a < 0$. Если $3 + a \leq 0$, то

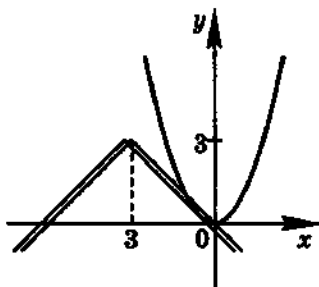


Рис. 267

положительных решений нет. Наименьшее a , при котором неравенство имеет только отрицательные решения, определяется из условия касания прямой $y = 3 - |x - a|$ и параболы $y = x^2$ при $x > a$. На рис. 267 приведены графики $y = 3 - |x - a|$ при $a = -3$ и в случае касания. Определим, при каком a прямая $y = 3 - |x - a| \Leftrightarrow y = 3 + a - x$ является касательной к параболе $y = x^2$. Пусть точка касания x_0 . Тогда $(x^2)'_{x=x_0} = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$. Уравнение касательной $y = -x - \frac{1}{4}$ — это уравнение прямой $y = 3 + a - x$, из равенства $3 + a = -\frac{1}{4}$ получим $a = -3\frac{1}{4}$. Итак, наименьшее значение $a < 0$, при котором неравенство не имеет решений, $a = -3\frac{1}{4}$. Следовательно, неравенство имеет только отрицательные решения, если $a \in (-3\frac{1}{4}; -3)$.

5. Если $a > 0$, то квадратный трехчлен принимает положительные значения в неограниченном промежутке. Поэтому положительные a не удовлетворяют условию задачи. Если $a = 0$, то исходное неравенство принимает вид $z > 0$. Ясно, что $a = 0$ тоже не удовлетворяет условию задачи. В случае $a < 0$ приведем графики (рис. 268). Подходящие параболы определяются из системы

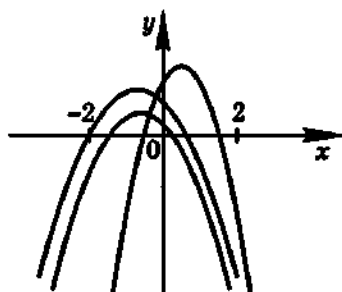


Рис. 268

$$\begin{cases} D = (1 - a^2)^2 + 4a^2 > 0, \\ x_0 = \frac{a^2 - 1}{2a}, \\ -2 < x_0 < 2, \\ y(-2) < 0, \\ y(2) < 0, \end{cases}$$

где D — дискриминант, x_0 — вершина параболы, $y(-2)$ и $y(2)$ значения квадратного трехчлена в точках $x = \pm 2$. Решим систему

$$\begin{cases} (1-a^2)^2 + 4a^2 > 0, \\ -2 < \frac{a^2-1}{2a} < 2, \\ 4a + 2(1-a^2) - a < 0, \\ 4a - 2(1-a^2) - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - \sqrt{5} < a < -2 + \sqrt{5}, \\ -2 < a < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a < -\frac{1}{2}.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют $-2 < a < -\frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Таких a нет. См. вар. 1.
2. Неравенство можно решить аналогично вар. 1. Решение можно также получить из решения вар. 1. Заметим, что если заменить x на $-x$, задача сведется к вар. 1. Поэтому ответ: если $a \geq \frac{1}{4}$, то $x \in \mathbb{R}$; если

$$0 < a < \frac{1}{4}, \text{ то } \begin{cases} x \leq \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2a}, \\ x \geq \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2a}; \end{cases} \text{ если } a = 0, \text{ то } x \leq 1; \text{ если } a < 0, \text{ то } \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2a} \leq x \leq \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2a}.$$

3. Замена x на $-x$ сведет задачу к вар. 1. Поэтому ответ: $a < -\frac{1}{4}$.
4. Задачу можно решить аналогично вар. 1. С другой стороны, можно использовать ответ к вар. 1, так как нетрудно показать, что неравенство имеет только положительные решения при тех a , при которых неравенство вар. 1 имеет только отрицательные решения. $-3\frac{1}{4} < a < -3$.
5. Изобразим графически множества $|z| \geq 7$ и $az^2 - 2(a^2 - 3)z - 12a \geq 0$

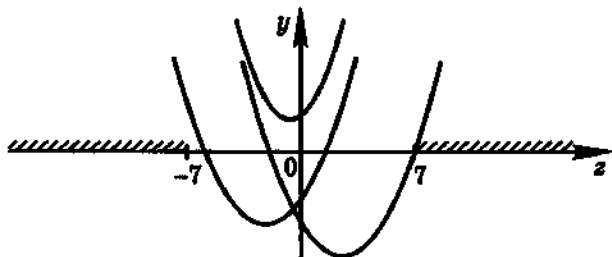


Рис. 269

(рис. 269). По условию, все числа $|z| \geq 7$ должны быть решениями неравенства, в котором значения квадратного трехчлена не меньше нуля. Ясно, что старший коэффициент не может быть неположительным. Графики подходящих квадратных трехчленов (параболы) показаны на рисунке. Условия, при которых параболы располагаются приведенным образом, следующие:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ D = 4(a^2 - 3)^2 + 48a^2 < 0, \\ D \geq 0, \\ -7 \leq x_0 \leq 7, \\ x_0 = \frac{a^2 - 3}{a}, \\ y(7) \geq 0, \\ y(-7) \geq 0, \\ a > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{Q}, \\ -7 \leq \frac{a^2 - 3}{a} \leq 7, \\ 14a^2 + 37a - 42 \geq 0, \\ -14a^2 + 37a + 42 \geq 0, \\ a > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 7a - 3 \leq 0, \\ a^2 + 7a - 3 \geq 0, \\ 14a^2 + 37a - 42 \geq 0, \\ -14a^2 + 37a + 42 \geq 0, \\ a > 0, \end{array} \right.$$

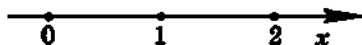
$$\text{откуда } \left\{ \begin{array}{l} 0 < a \leq \frac{7 + \sqrt{61}}{2}, \\ a \geq \frac{6}{7}, \\ a \leq -\frac{7}{2}, \\ -\frac{6}{7} \leq a \leq \frac{7}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{6}{7} \leq a \leq \frac{7}{2}.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют $\frac{6}{7} \leq a \leq 3.5$.

Задание 14.9. Уравнения с модулями

Вариант 1

1. а) Вещественную числовую ось можно разбить на четыре промежутка. Границы промежутков совпадают с корнями подмодульных выражений $x = 0$, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$.



- 1) $x \leq 0$. В этом промежутке уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$2) \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ 3 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$3) \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ x + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$4) \begin{cases} x > 2, \\ 3x - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Итак, решение $x = 1$.

$$б) x^2 - |x| = 6 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| - 6 = 0 \Leftrightarrow (|x| - 3)(|x| + 2) = 0 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

- в) Исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ |2x-1|-x=-1, \\ x > 1, \\ 1-x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, \\ -3x=-2, \end{cases} \\ x > \frac{1}{2}, \\ x=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

2. Подставим в уравнение параметр $a=0$ и решим его.

$$|x+3|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=-7. \end{cases}$$

Проверим, являются ли числа $x=1$ и $x=-7$ решениями уравнения при всех a . Если подставим в уравнение $x=-7$, то имеем $8a=0$, равенство верно только при $a=0$. Значит, $x=-7$ не является корнем при всех a . Подставим $x=1$, имеем $0 \cdot a=0 \Leftrightarrow 0=0$. Значит, искомое число $x=1$.

3. Решим уравнение, раскрывая модуль,

$$|1-ax|=x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-ax=x, \\ 1-ax \geq 0, \\ ax-1=x, \\ 1-ax < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)x=1, \\ ax \leq 1, \\ (a-1)x=1, \\ ax > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1, \\ x = \frac{1}{a+1}, \\ \frac{a}{a+1} \leq 1, \\ a \neq 1, \\ x = \frac{1}{a-1}, \\ \frac{a}{a-1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1, \\ x = \frac{1}{a+1}, \\ -\frac{1}{a+1} \leq 0, \\ a \neq 1, \\ x = \frac{1}{a-1}, \\ \frac{1}{a-1} > 0, \end{cases}$$

$$\text{то есть } \begin{cases} x = \frac{1}{a+1}, \\ \text{при } a > -1, \\ x = \frac{1}{a-1}, \\ \text{при } a > 1. \end{cases}$$

Итак, единственное решение при $a \in (-1; 1]$.

Вариант 2

1. а) Исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x \leq -2, \\ -3x - 3 = 2, \\ -2 < x \leq -1, \\ -x + 1 = 2, \\ -1 < x \leq 0, \\ x + 3 = 2, \\ x > 0, \\ 3x + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x = -\frac{5}{3}, \\ -2 < x \leq -1, \\ x = -1, \\ -1 < x \leq 0, \\ x = -1, \\ x > 0, \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

б) Исходное уравнение равносильно следующему уравнению

$$|x|^2 + |x| - 6 = 0 \Leftrightarrow (|x| + 3)(|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

в) Уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} |2x - 1| - x = 1, \\ x \geq 1, \\ x < 1, \\ 1 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 - x = 1, \\ x \geq 1, \\ x < 1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 0. \end{cases}$$

2. Определим, какие корни имеет уравнение при $a = 0$. Тогда уравнение принимает вид $|x - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x = -3. \end{cases}$ Проверка показала, что

корень $x = 7$ имеем при таких a , что $10a = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Корень $x = -3$ при таких a , что $5 + a \cdot 0 = 5 \Leftrightarrow 0 = 0$, то есть при всех значениях a .
 Ответ: $x = -3$.

3. Воспользуемся графиками.

Случай $a > 1$. Из графиков видно, что в случае $a > 1$ имеем два корня (рис. 270).

Случай $0 < a \leq 1$. В этом случае — один корень (рис. 271).

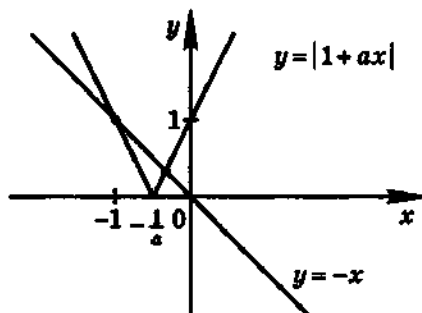


Рис. 270

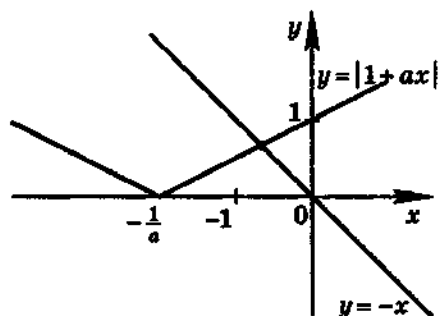


Рис. 271

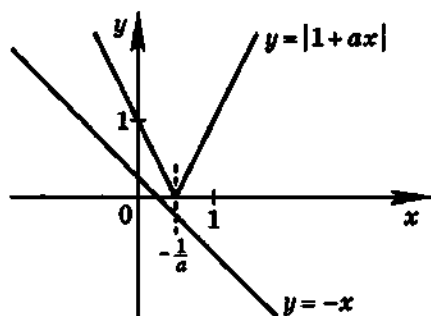


Рис. 272

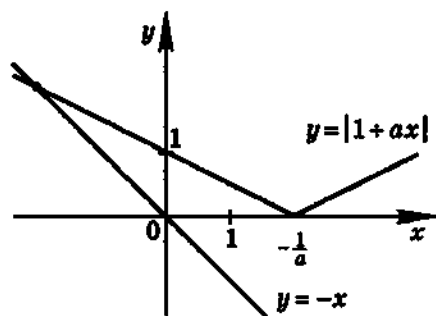


Рис. 273

Случай $a \leq -1$ (рис. 272). Нет корней.

Случай $-1 < a < 0$ (рис. 273). В этом случае один корень.

Случай $a = 0$. Уравнение принимает вид $x = -1$ и имеет единственное решение. Итак, единственное решение при $a \in (-1; 1]$.

Задание 14.10. Неравенства с модулем

Вариант 1

1. Ясно, что область допустимых значений $x \neq 1$. Так как $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$, неравенство можно записать следующим образом

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ |x+1| > |x-1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -x-1 > -x+1, \\ -1 \leq x < 1, \\ x+1 > -x+1, \\ x > 1, \\ x+1 > x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1, \\ x > 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Исходное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} -1 \leq z \leq 2, \\ -z^2 + z + 2 < z, \\ \begin{cases} z > 2, \\ z < -1, \end{cases} \\ z^2 - z - 2 < z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq z \leq 2, \\ z^2 > 2, \\ \begin{cases} z > 2, \\ z < -1, \end{cases} \\ z^2 - z - 2 < z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < z \leq 2, \\ \begin{cases} z > 2, \\ z < -1, \end{cases} \\ (z-1-\sqrt{3})(z-1+\sqrt{3}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < z \leq 2, \\ \begin{cases} z > 2, \\ z < -1, \\ 1 - \sqrt{3} < z < 1 + \sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < z \leq 2, \\ 2 < z < 1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} < z < 1 + \sqrt{3}.$$

Целое решение: $z=2$.

3. $y^3 - y = y(y-1)(y+1)$. $y^3 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$. При этих значениях y исходное неравенство можно записать как

$$y(y-1)(y+1) + y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1.$$

Значит, решение: $y \geq 1$.

Если $y^3 - y < 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, то неравенство примет вид

$$\begin{aligned} -y(y-1)(y+1) + y - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow (y-1)(-y^2 - y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y - 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (y-1)\left(y + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(y - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow y \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что модуль раскрывали при $y \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, получим часть решения $y \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$. Итак, исходное неравенство имеет следующие решения: $y \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$.

4. Приведем графики левых и правых частей неравенства $y = |t|$, $y = \frac{a}{t}$ (рис. 274).

Случай $a > 0$.

Неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \begin{cases} t < \frac{a}{t}, \\ t > 0, \\ -t < \frac{a}{t}, \\ t < 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 < a, \\ t > 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \sqrt{a}, \\ a > 0. \end{cases} \end{cases}$$

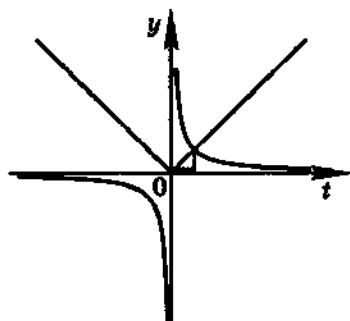


Рис. 274

Случай $a = 0$ приводит к неравенству $|t| < 0$, которое не имеет решений.

$$\begin{aligned} \text{Случай } a < 0. \quad |t| < \frac{a}{t} &\Leftrightarrow \begin{cases} |t| < \frac{a}{t}, \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t < \frac{a}{t}, \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2 > a, \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 < -a, \\ t < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{-a} < t < 0, \\ a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Перепишем неравенство в виде $|x-a|+|1-x| \geq |1-a|$ и воспользуемся свойством модуля суммы $|x-a+1-x| \leq |x-a|+|1-x|$, откуда следует, что $|1-a| \leq |x-a|+|1-x|$, то есть получили исходное неравенство. Значит, оно верно при всех x и a .

Вариант 2

- Исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} |x-1| > |x+1|, \\ x \neq -1. \end{cases}$ В отличие от вар. 1 можно его решить графически (рис. 275). Решение: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.
- Неравенство можно решить аналогично вар. 1. Но приведем решение с помощью графиков $y = |x^2 + z - 2|$ и $y = z$ (рис. 276).
Решение: $z \in (\sqrt{3}-1; \sqrt{2})$. Целое решение: $z = 1$.

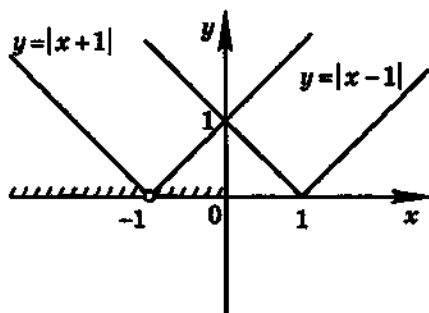


Рис. 275

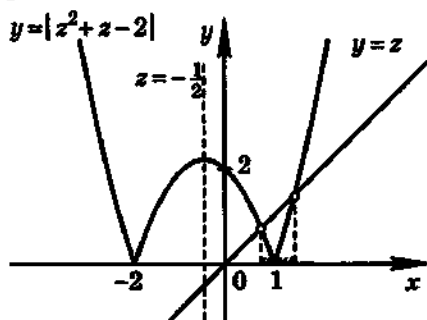


Рис. 276

- Решение можно получить аналогично вар. 1. Но нетрудно заметить, что если заменить y на $-y$, получим неравенство вар. 1. Поэтому, используя решение вар. 1, получим
$$\begin{cases} -y \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ -y \leq -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \end{cases} \text{ откуда имеем}$$
 решение $y \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty)$.

- Если $a = 0$, то неравенство запишется в виде $|t| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \mathbb{R}, \\ t \neq 0. \end{cases}$

Если $a > 0$, то неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 > a, \\ t < 0, \\ -t^2 < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \sqrt{a}, \\ t < 0, \\ t^2 > -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \sqrt{a}, \\ t < 0. \end{cases}$$

Если $a < 0$, то неравенство равносильно

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 > a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t < -\sqrt{-a}. \end{cases}$$

5. Решение неравенства — любые $x \in R$ и $a \in R$. См. вар. 1.

Задание 14.11. Иррациональные уравнения

Вариант 1

$$\begin{aligned} 1. \text{ а) } x - 13 = \sqrt{x - 7} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 13, \\ (x - 13)^2 = x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 13, \\ x^2 - 27x + 176 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 13, \\ (x - 16)(x - 11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16. \end{aligned}$$

б) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y^5 - y + 1 = 1 - 2y^5, \\ 1 - 2y^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^5 - y = 0, \\ y \leq \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ y = \pm \sqrt[5]{\frac{1}{3}}, \\ y \leq \sqrt[5]{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Теперь надо сравнить числа $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$. $\sqrt[5]{\frac{1}{3}} < \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (\frac{1}{3})^5 < (\frac{1}{2})^4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{243} < \frac{1}{16}$. Значит, решение исходного уравнения: $\begin{cases} y = 0, \\ y = \pm \sqrt[5]{\frac{1}{3}}. \end{cases}$

в) Так как для любого $z \in R$ $2z + 16 > 2z + 5$, то $\sqrt{2z + 16} > \sqrt{2z + 5}$ для допустимых значений. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sqrt{2z + 16} - \sqrt{2z + 5} = 1, \\ 2z + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2z + 16} = 1 + \sqrt{2z + 5}, \\ z \geq -2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z + 16 = 1 + 2z + 5 + 2\sqrt{2z + 5}, \\ z \geq -2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \sqrt{2z + 5}, \\ z \geq -2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 = 2z + 5, \\ z \geq -2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &z = 10. \end{aligned}$$

г) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{aligned} &\begin{cases} t \geq 1, \\ 1 + t(t^2 - 24)^{0,5} = (t - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1, \\ t(t^2 - 24)^{0,5} = t^2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1, \\ (t^2 - 24)^{0,5} = t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2, \\ t^2 - 24 = (t - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2, \\ 4t = 28 \end{cases} \Leftrightarrow t = 7. \end{aligned}$$

2. Так как $x^2+1 \geq 1$, $x^2+2 \geq 2$, $x^2+3 \geq 3$, то наименьшее значение левой части уравнения равно $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Функция в левой части не ограничена сверху и принимает какое угодно большое значение. Поэтому для всех $a \geq 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ уравнение имеет решения.

Вариант 2

- а) $x = 4$.
 б) $\begin{cases} y=0, \\ y=\pm\sqrt[3]{3}. \end{cases}$
 в) $z = 10$.
 г) $t = 5$.
- Для всех $a \geq 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ уравнение имеет решения.

Задание 14.12. Иррациональные неравенства

Вариант 1

1. Область допустимых значений: $x \geq -2$. Если $-2 \leq x < 0$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, поэтому $-2 \leq x < 0$ — часть решения неравенства.

$$\begin{aligned} \text{Если } x \geq 0, \text{ то } \begin{cases} x \geq 0, \\ x+2 > x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ (x-2)(x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 2 \text{ — часть решения.} \end{aligned}$$

$$\text{Итак, решение: } \begin{cases} 0 \leq x < 2, \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 2).$$

2. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} y \leq 8, \\ y^2 - 3y - 10 \leq (y-8)^2, \\ y^2 - 3y - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 8, \\ y \leq \frac{74}{13}, \\ (y-5)(y+2) > 0 \end{cases}$$

(здесь использована область определения функции $z = y^{0,5}$, т. е. $y > 0$). $y \in (-\infty; -2) \cup (5; \frac{74}{13}]$.

3. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt[4]{|z-1|} \leq \sqrt[4]{\sqrt{z}-1}, \\ z \neq 0, \\ |z-1| \neq 0, \\ \sqrt{z}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 1, \\ |z-1| \leq \sqrt{z}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 1, \\ z-1 \leq \sqrt{z}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 1, \\ z-\sqrt{z} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z > 1, \\ \sqrt{z}(\sqrt{z}-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z \in \emptyset. \text{ Решений нет.}$$

4. Исходное неравенство равносильно следующему неравенству

$$\sqrt{3-t} > 0,5 + \sqrt{t+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t \geq 0, \\ 3-t > 0,25 + \sqrt{t+1} + t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3, \\ 1,75 - 2t > \sqrt{t+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3, \\ (1,75 - 2t)^2 > t+1, \\ t+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 3, \\ 4t^2 - 8t + 2,0625 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 3, \\ 4(t - \frac{8-\sqrt{31}}{8})(t - \frac{8+\sqrt{31}}{8}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq t < 1 - 0,125\sqrt{31}.$$

$$5. a^2 + a + 1 = (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \quad a^2 + a + 2 \geq \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}, \quad a^2 + a + 3 \geq \frac{11}{4}.$$

Левая часть исходного неравенства не меньше

$$\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{7}{4}} + \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{11}}{2} > \frac{1,7 + 2,6 + 3,3}{2} = 3,8.$$

Значит, для любого a левая часть неравенства больше правой.

Вариант 2

1. Допустимые значения: $x \geq -1$. Если $-1 \leq x < 1$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, поэтому числа $-1 \leq x < 1$ — часть решения. Если $x \geq 1$, то неравенство равносильно

$$\begin{cases} x+1 > (x-1)^2, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x < 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 3 \text{ — часть решения.}$$

Итак, решение: $x \in [-1; 3)$.

2. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} y^2 - 5y - 6 \neq 0, \\ \sqrt{y^2 - 5y - 6} \leq 9 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y - 6 > 0, \\ y^2 - 5y - 6 \leq 81 - 18y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6)(y+1) > 0, \\ 13y \leq 87 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 6, \\ y < -1, \\ y \leq \frac{87}{13} \end{cases} \Leftrightarrow y \in (-\infty; -1) \cup (6; \frac{87}{13}].$$

3. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} z \neq 1, \\ z \neq 0, \\ \sqrt[4]{|z-1|} \leq \sqrt[4]{1-\sqrt{z}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1, \\ z \neq 0, \\ |z-1| \leq 1-\sqrt{z}, \\ 1-\sqrt{z} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < z < 1, \\ 1-z \leq 1-\sqrt{z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < z < 1, \\ \sqrt{z}(\sqrt{z}-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z \in \emptyset. \text{ Нет решений.}$$

4. Исходное уравнение равносильно следующему уравнению

$$\sqrt{2-t} > 0,5 + \sqrt{t+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t \geq 0, \\ 2-t > 0,25 + \sqrt{t+2} + t+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2, \\ \sqrt{t+2} < -0,25 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -0,125, \\ t+2 \geq 0, \\ t+2 < (0,25+2t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq -0,125, \\ 4t^2 > 1,9735 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq -0,125, \\ t^2 > \frac{31}{64} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq -0,125, \\ \begin{cases} t > 0,125\sqrt{31}, \\ t < -0,125\sqrt{31} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow t \in [-2; -0,125\sqrt{31}).$$

$$5. a^2 - a + 1 = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \quad a^2 - a + 2 \geq \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}, \quad a^2 - a + 3 \geq \frac{11}{4},$$

значит, левая часть неравенства не меньше

$$\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{7}{4}} + \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{11}}{2} > \frac{1,7 + 2,6 + 3,3}{2} = 3,8.$$

Неравенство верно при всех $a \in \mathbb{R}$.

Задача 14.13. Иррациональные уравнения с параметром

Вариант 1

1. а) Если $a < 0$, то левая часть уравнения при $x \geq a$ неотрицательна, а правая часть уравнения отрицательна. В этом случае нет решений. Если $a = 0$, то $x = 0$. Если $a > 0$, то $x - a = a^2 \Leftrightarrow x = a^2 + a$.

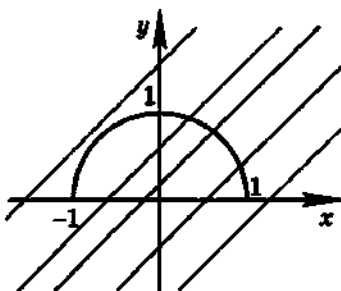


Рис. 277

- б) Решим графически. Левая часть $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$ — уравнение полуокружности радиуса $r=1$ с центром $(0, 0)$. Правая часть $y = x + a$ — уравнение прямой. На рис. 277 приведены семейство прямых $y = x + a$ при различных a и полуокружность.

Если $a < -1$, решений нет. Если $a = -1$, то решение $x = 1$. Если $-1 < a < 1$, то решение $x = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{2-a^2})$. Если $a = 1$, то решение $x = 0$, $x = -1$. Если $1 < a < \sqrt{2}$, то решение $x = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{2-a^2})$. Если $a = \sqrt{2}$, то $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (этот случай определяет прямую $x + \sqrt{2}$ как касательную к окружности). Если $a > \sqrt{2}$, то решений нет.

2. Ясно, что при $a = 0$ решение $x = -1$ единственно. При $a > 0$ используем графики.

На рис. 278 приведено взаимное расположение графиков $y = x + 1$ и $y = \sqrt{ax}$ при различных a . Ясно, что графики могут не иметь общих точек, иметь одну общую точку, иметь две общие точки. По условию, надо определить такие a , чтобы графики имели единственную общую точку. Такое значение a определяется из условия касания графиков, то есть прямая $y = x + 1$ — касательная к $y = \sqrt{ax}$ в некоторой точке x_0 . Тогда уравнение касательной, полученное для функции $y = \sqrt{ax}$,

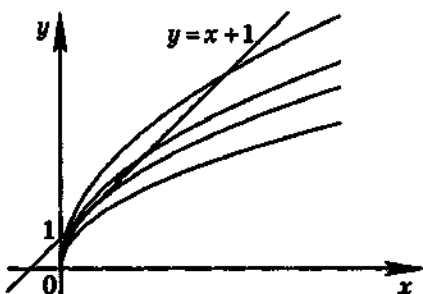


Рис. 278

есть $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x_0}}x + \frac{1}{2}\sqrt{ax_0}$.

Так как эта прямая совпадает с $y = x + 1$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x_0}} = 1, \\ \frac{1}{2}\sqrt{ax_0} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{x_0}} = 2, \\ \sqrt{ax_0} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4x_0, \\ ax_0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4. \text{ Итак, уравнение имеет единственное}$$

решение при $a = 0$, $a = 4$.

Вариант 2

1. Уравнения равносильны уравнениям вар. 1 с заменой a на $-a$. Поэтому в решениях вар. 1 можно заменить a на $-a$ и получить решения рассматриваемых задач.

а) Решение $x = a^2 - a$ при $a \leq 0$.

б) Если $a > 1$, то решений нет; если $a = 1$, то $x = 1$; если $-1 < a < 1$, то $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2-a^2})$; если $a = -1$, то $x = -1$, $x = 0$; если $-\sqrt{2} < a < -1$, то $x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{2-a^2})$; если $a = -\sqrt{2}$, то $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; если $a < -\sqrt{2}$, то решений нет.

2. Если заменить a на $-a$ и x на $-x$, получим уравнение вар. 1. Используя это решение, получим для исходного уравнения $a = 0$, $a = -4$.

Задание 14.14. Иррациональные неравенства с параметром

Вариант 1

1. а) Если $a = 0$, неравенство равносильно $\sqrt{x^2} > x \Leftrightarrow |x| > x \Leftrightarrow x < 0$.
Если $a > 0$, то неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x+a < 0, \\ x+a \geq 0, \\ x^2+a^2 > (x+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -a, \\ x \geq -a, \\ ax < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -a, \\ x \geq -a, \\ x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Если } a < 0, \text{ то } \begin{cases} x+a < 0, \\ x+a \geq 0, \\ x^2+a^2 > (x+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -a, \\ x \geq -a, \\ ax < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -a, \\ x \geq -a, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

- б) Если $a = 0$, неравенство принимает вид $\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Если $a > 0$, то

$$\begin{cases} x-a^2+2\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}+x > 4a^2, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-a^2x} > 5a^2-2x, \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-a^2x \geq 0, \\ 5a^2-2x < 0, \\ 4(x^2-a^2x) > (5a^2-2x)^2 \\ 5a^2-2x \geq 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5a^2}{2}, \\ x \leq 0, \\ x \geq a^2, \\ x \leq \frac{5a^2}{2}, \\ x > \frac{25a^2}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2,5a^2, \\ x \leq 2,5a^2, \\ x > 1,5625a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 1,5625a^2.$$

Если $a < 0$, то для допустимых значений $x \geq a^2$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая часть отрицательна. Значит, решение в этом случае $x \geq a^2$.

2. Решим графически. Левая часть неравенства $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ — уравнение полуокружности радиуса $r = |a|$ с центром $(0; 0)$. $y = \sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ y^2 + x^2 = a^2. \end{cases}$ Правая часть $y = x + 1$ — уравнение прямой, которая

от параметра не зависит. Параметр a задает семейство полуокружностей (рис. 279). Графически условию задачи удовлетворяют полуокружности 1 и 2. Полуокружность 2 касается прямой $y = x + 1$. Из условия касания определяем a :

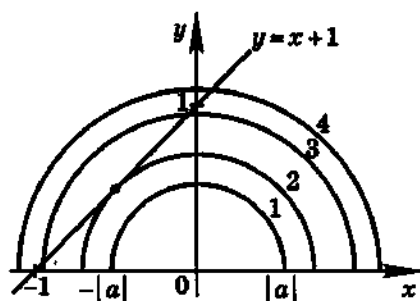


Рис. 279

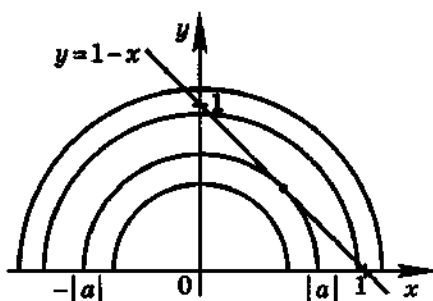


Рис. 280

$$\begin{cases} -\frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} = 1, \\ \sqrt{a^2 - x_0^2} + \frac{x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} = 1, \end{cases}$$

где x_0 — абсцисса точки касания. Решая систему, определим, что касание имеет место при $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Если $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, имеем графически полуокружность 1. Итак, неравенство не имеет решений при $|a| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вариант 2

Нетрудно заметить, что в задачах этого варианта можно заменить a на $-a$ или x на $-x$ и привести неравенства к вар. 1. Поэтому, используя решение вар. 1, запишем ответы:

- а) Если $a > 0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a = 0$, то $x < 0$; если $a < 0$, то $x < 0$.
б) Если $a > 0$, то $x \geq a^2$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a < 0$, то $x > \frac{25}{16} a^2$.
- $|a| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 280). Полезно решить этот вариант самостоятельно без использования ответов к первому варианту.

Задание 14.15. Нелинейные системы уравнений

Вариант 1

- а) Ясно, что $y = 0$ не удовлетворяет системе. Поэтому преобразуем ее:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 y = 1, \\ y^3 - x y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x - y) = 1, \\ y^2(y - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x - y) = 1, \\ y - x = \frac{2}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} = -\frac{1}{2}, \\ y - x = \frac{2}{y^2}. \end{cases}$$

Первое уравнение не имеет решения, следовательно, нет решений и у системы.

б) Из второго уравнения $\sqrt{-x}\sqrt{y}(\sqrt{-x}+\sqrt{y})=30 \Rightarrow \sqrt{-x}+\sqrt{y}=\frac{30}{\sqrt{-xy}}$, подставим в первое уравнение:

$$-xy-11\sqrt{-xy}+30=0 \Leftrightarrow (\sqrt{-xy}-5)(\sqrt{-xy}-6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-xy}=5, \\ \sqrt{-xy}=6. \end{cases}$$

Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} \sqrt{-xy}=5, \\ \sqrt{-x}+\sqrt{y}=\frac{30}{\sqrt{-xy}}, \\ \sqrt{-xy}=6, \\ \sqrt{-x}+\sqrt{y}=\frac{30}{\sqrt{-xy}}. \end{cases}$$

Для решения введем переменные $u=\sqrt{-x}$ и $v=\sqrt{y}$, тогда
$$\begin{cases} uv=5, \\ u+v=6, \\ uv=6, \\ u+v=5. \end{cases}$$

Решая, получим

$$\begin{cases} u=5, \\ v=1, \\ u=2, \\ v=3, \\ u=1, \\ v=5, \\ u=3, \\ v=2, \end{cases}$$

откуда для x и y имеем $(-9; 4)$, $(-25; 1)$, $(-1; 25)$, $(-4; 9)$.

в) Система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ xyz = x + y - z, \\ xyz = 2(y + z - x), \\ xyz = 3(z + x - y), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ x + y - z = xyz, \\ y + z - x = \frac{xyz}{2}, \\ z + x - y = \frac{xyz}{3}, \end{cases}$$

сложив первые два уравнения, получим

$$\begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ x + y - z = xyz, \\ 2y = \frac{8}{2}xyz, \\ z + x - y = \frac{xyz}{3}, \end{cases}$$

преобразуем второе уравнение, учитывая $y \neq 0$. Имеем систему

$$\begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ x + y - z = xyz, \\ xz = \frac{4}{3}, \\ z + x - y = \frac{xyz}{3}. \end{cases}$$

Подставляем значение xz в первое и третье уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ x + y - z = \frac{4}{3}y, \\ xz = \frac{4}{3}, \\ z + x - y = \frac{4}{9}y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ x - \frac{1}{3}y - z = 0, \\ xz = \frac{4}{3}, \\ z + x - \frac{13}{9}y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ y = 3(x - z), \\ xz = \frac{4}{3}, \\ 9z + 9x - 13 \cdot 3(x - z) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ y = 3(x - z), \\ xz = \frac{4}{3}, \\ z = \frac{5}{8}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ y = 3(x - z), \\ x^2 = \frac{32}{15}, \\ z = \frac{5}{8}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ y = 3(x - z), \\ x = \pm \frac{4}{15}\sqrt{30}, \\ z = \frac{5}{8}x \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4}{15}\sqrt{30}, \\ y = \pm \frac{8}{10}\sqrt{30}, \\ z = \pm \frac{1}{6}\sqrt{30}. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, решения $(x, y, z) (\pm \frac{4}{15}\sqrt{30}, \pm \frac{8}{10}\sqrt{30}, \pm \frac{1}{6}\sqrt{30})$.

2. Из второго уравнения системы следует, что

$$(x + y)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = a^2.$$

Тогда из первого уравнения следует, что $xy = 0$. Значит, решение

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = a, \\ y = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

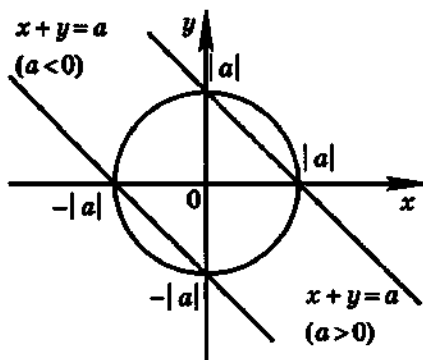


Рис. 281

Единственное решение при $a=0$ $x=y=0$. Приведем графическую иллюстрацию (рис. 281). Если $a \neq 0$, то $x^2+y^2=a^2$ — уравнение окружности радиуса $r=|a|$ с центром $(0; 0)$. $x+y=a$ — уравнение прямой. Если $a \neq 0$, то система имеет два решения.

3. Нет, неверно. Например, при $a=1$ система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ y^2 - 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Решения $(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$. Решения неположительные.

Вариант 2

1. а) Нет решений.

б) $(1; -4), (4; -1)$.

в) $(\pm \frac{1}{6}\sqrt{30}, \pm \frac{2}{10}\sqrt{30}, \pm \frac{4}{15}\sqrt{30})$.

2. $a=0$.

3. Нет, неверно.

Задание 14.16. Контрольное задание

Вариант 1

1. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} a > 0, \\ x \neq 2, \\ (a-1)x^2 - 2ax - a = 0. \end{cases}$

Если $a=1$, то решение $x=-\frac{1}{2}$.

Если $a \neq 1$, то уравнение — квадратное и оно не имеет решений при дискриминанте $D < 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4a(a-1) < 0 \Leftrightarrow 4a(2a-1) < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$.

Если $D \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}$, уравнение $(a-1)x^2 - 2ax - a = 0$ имеет корни

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2a^2 - a}}{a-1}.$$

Итак, решение $x = -\frac{1}{2}$ при $a=1$; решение $x = -1$ при $a=\frac{1}{2}$; решения $x = \frac{a \pm \sqrt{2a^2 - a}}{a-1}$ при $a > \frac{1}{2}$ и $a \neq 1$; при $0 < a < \frac{1}{2}$ решений нет.

б) Введем переменную $z = y^2 - 3y$, тогда имеем уравнение для z

$$z - \sqrt{2z+5} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{2z+5} = z+3 \Leftrightarrow \begin{cases} z+3 \geq 0, \\ 2z+5 = z^2+6z+9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq -3, \\ z^2+4z+4=0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z = -2. \text{ Значит, } y^2 - 3y = -2 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

2. а) Система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} |z^2 + |2z-1|-1| = 2 - z^2, \\ \sqrt{z^4-1} < 1, \\ z^4-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2 + |2z-1|-1| = 2 - z^2, \\ 0 < z^4-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2 + |2z-1|-1| = 2 - z^2, \\ 1 < z^4 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2 + |2z-1|-1| = 2 - z^2, \\ 1 < |z| < \sqrt[4]{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} |z^2 + 2z-2| = 2 - z^2, \\ 1 < z < \sqrt[4]{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} |z^2 - 2z| = 2 - z^2, \\ -\sqrt[4]{2} < z < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z^2 + 2z-2 = 2 - z^2, \\ 1 < z < \sqrt[4]{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} z^2 - 2z = 2 - z^2, \\ -\sqrt[4]{2} < z < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z^2 + z-2=0, \\ 1 < z < \sqrt[4]{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} z^2 - z-1=0, \\ -\sqrt[4]{2} < z < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z=1, \\ z=-2, \\ 1 < z < \sqrt[4]{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ -\sqrt[4]{2} < z < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \emptyset. \text{ Нет решений.} \end{cases}$$

б) Из условий следует $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Перемножим левые и правые части уравнений. Тогда

$$(xyz)^2 = ((x+1)(y+1)(z+1))^2 \Rightarrow xyz = (x+1)(y+1)(z+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow xyz = xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1 \Leftrightarrow xy + yz + xz + x + y + z + 1 = 0.$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, решений нет.

3. Необходимо, чтобы квадратный трехчлен в знаменателе не имел корней. Это выполняется при $D=1-4(a^2+1)<0 \Leftrightarrow -4a^2-3<0 \Leftrightarrow a \in R$. Значит, при любых $a \in R$, $a \in R$, $(a^2+1)x^2+x+1>0$. Тогда исходное неравенство равносильно совокупности

$$ax^2+ax-1<0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=0, \\ x \in R, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a>0, \\ D=a^2+4a<0, \\ x \in R, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a>0, \\ D=a^2+4a \geq 0, \\ x \in \left(\frac{-a-\sqrt{D}}{2a}; \frac{-a+\sqrt{D}}{2a} \right), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a<0, \\ D=a^2+4a \geq 0, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{a+\sqrt{D}}{2a} \right) \cup \left(\frac{-a-\sqrt{D}}{2a}; +\infty \right), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a<0, \\ D=a^2+4a<0, \\ x \in \emptyset. \end{array} \right.$$

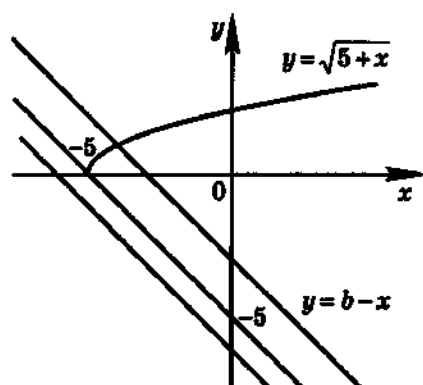


Рис. 282

Для того чтобы при любом x выполнялось неравенство, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{ \begin{array}{l} a=0, \\ a(a+4)<0 \end{array} \right. \Leftrightarrow -4<a \leq 0.$$

4. Решим задачу графически. График левой части уравнения — полупарабола $y=\sqrt{5+x}$, график правой части — прямая $y=b-x$ (рис. 282). Графики пересекаются, если $b \geq -5$. Не пересекаются при $b < -5$. Уравнение при $b < -5$ не имеет решений.

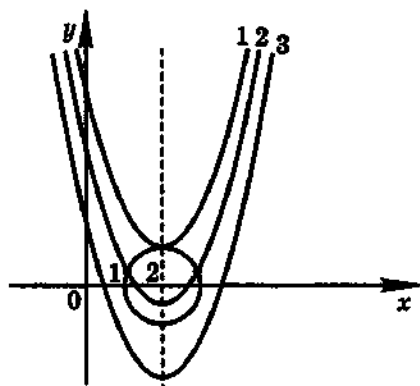


Рис. 283

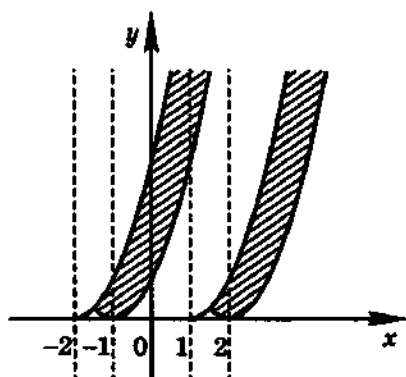


Рис. 284

5. Первое уравнение можно записать в виде $(x-2)^2 + y^2 = 1$. Это уравнение окружности радиуса $r=1$ с центром $(2; 0)$. Второе уравнение задает параболу $y = x^2 - 4x + 4 + |c|$ с осью $x=2$.

В зависимости от c графики могут иметь одну общую точку, две общие точки, не иметь общих точек (рис. 283). Определим случай касания параболы и окружности (1). Абсцисса вершины параболы $x_0 = 2$ и абсцисса центра окружности равны. Для касания достаточно, чтобы ординаты этих точек тоже были равны, то есть $1 = x_0^2 - 4x_0 + 4 + |c|$, откуда $|c| = 1 - x_0^2 + 4x_0 - 4 \Leftrightarrow |c| = 1 \Leftrightarrow c = \pm 1$. Итак, при $c = \pm 1$ система имеет единственное решение.

$$6. 1 < |\sqrt{y} - x| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < \sqrt{y} - x < 2, \\ -2 < \sqrt{y} - x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < \sqrt{y} < 2+x, \\ x-2 < \sqrt{y} < x-1. \end{cases}$$

График $\sqrt{y} = 2+x$ — часть параболы $\begin{cases} y = (2+x)^2, \\ x \geq -2, \end{cases}$

график $\sqrt{y} = x+1$ — часть параболы $\begin{cases} y = (x+1)^2, \\ x \geq -1, \end{cases}$

график $\sqrt{y} = x-1$ — часть параболы $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ x \geq 1, \end{cases}$

график $\sqrt{y} = x-2$ — часть параболы $\begin{cases} y = (x-2)^2, \\ x \geq 2 \end{cases}$ (рис. 284).

Вариант 2

1. а) Если $a > \frac{1}{2}$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{2a^2 - a}}{a - 1}$; если $a = 1$, то $x = \frac{1}{2}$; если $a = \frac{1}{2}$, то $x = 1$; если $0 < a < \frac{1}{2}$, то нет решений.

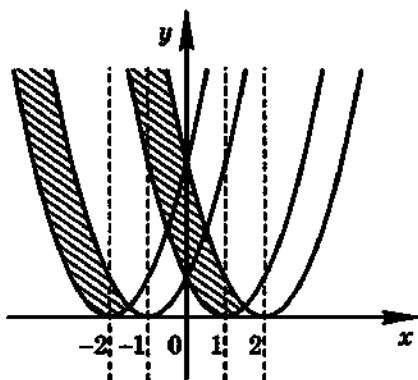


Рис. 285

б) Заменой $z = y^2 + 3y$ приводим уравнение к виду $z - \sqrt{2z + 5} = -3$.
Решение $y = -1$, $y = -2$.

2. а) Нет решений.

б) Нет решений.

3. $-4 < a \leq 0$.

4. $b > 5$.

5. $c = \pm 1$.

6. Рис. 285.

Тема 15

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Задание 15.1. Общие свойства последовательностей

Вариант 1

1. Так как $0 < \frac{3}{n} \leq 3$, то $0 < a_n = 2 + \frac{3}{n} \leq 5$. Итак, последовательность ограничена, $2 < a_n \leq 5$.
2. Если $a = 0$, $x_n = bn + c$. Условие возрастания $x_{n+1} > x_n$ равносильно $b(n+1) + c > bn + c \Leftrightarrow b(n+1) > bn \Leftrightarrow b > 0$. Если $a > 0$, то значения x_n лежат на параболе $z = at^2 + bt + c$, где $t \in \mathbb{N}$ (рис. 286).

Для сравнения x_{n+1} и x_n достаточно сравнить $z_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1)$ и $z_n = an^2 + bn$. Числа z_n тоже лежат на параболе $z = at^2 + bt$, вершина которой $t_0 = -\frac{b}{2a}$, корни $t_1 = 0$ и $t_2 = -\frac{b}{a}$. Подходящие условию задачи параболы 1 и 2 приведены

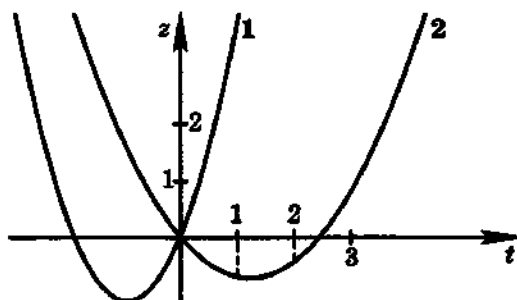


Рис. 286

на рис. 286. Если ось параболы находится левее точки $t = \frac{3}{2}$, то точки (n, z_n) , где $n \geq 2$, находятся на «возрастающей» ветви. Кроме того, $z_1 < z_2$, первая точка тоже может находиться на «возрастающей» ветви, но это не обязательное условие. Достаточное условие таково:

$$\begin{cases} t_0 \leq 1, \\ t_0 - 1 < 2 - t_0, \\ t_0 < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Условие $t_0 \leq 1$ задает параболы с осями левее $t_0 = 1$. Тогда все точки с $t = n$ ($n \in N$) лежат на «возрастающей» ветви (парабола 1 на рис. 286). Условие $t_0 - 1 < 2 - t_0$ определяет, что точка $t = 1$ ближе к оси, чем точка $t = 2$, и поэтому $z_1 < z_2$. Итак, решая неравенство в достаточном условии, приходим к выводу

$$t_0 = -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b > -3a, \\ a > 0. \end{cases}$$

Если $a < 0$, то возрастания для всех n быть не может.

Ответ: $\begin{cases} a = 0, b > 0, \\ a > 0, b > -3a. \end{cases}$

3. Из условия $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ можно сделать вывод, что последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, тогда $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_1 = 0$, $d = 1$, то есть $a_n = n-1$.
4. Найдем наибольшее значение функции $y(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Оно равно $\frac{1}{2}$ при $x=1$. Так как $x=1$ — натуральное число, можно положить $x=n=1$, и наибольший член $x_n = \frac{1000 \cdot n}{n^2+1}$ равен $x_1 = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$.
5. $r_1 = 1$. Из построения $AC = BC = BK = r_1 = 1$, $AE = DK = DE = r_2$ (рис. 287). Из прямоугольных треугольников ADE и ABC следует

$$\begin{aligned} (BK+DK)^2 &= (AC-AE)^2 + (BC-NC)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (r_1+r_2)^2 = (r_1-r_2)^2 + (r_1-r_2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = 2(r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2r_1r_2 = r_1^2 + r_2^2 - 4r_1r_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 - 6r_1r_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 6\frac{r_2}{r_1} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Откуда $\frac{r_{n+1}}{r_n} = 3 - 2\sqrt{2}$, и так как $r_1 = 1$,
 $r_n = (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}$.

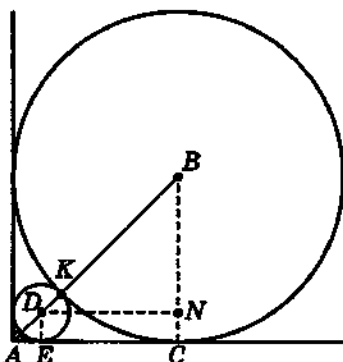


Рис. 287

Вариант 2

1. Последовательность ограничена, $-3 < a_n < 2$.

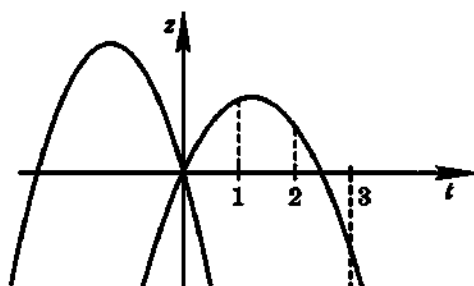


Рис. 288

2. Достаточно сравнить z_{n+1} и z_n , где $z_n = an^2 + bn$ — ординаты точек $(n; z_n)$, лежащих на параболе

$$z = at^2 + bt.$$

Подходящие параболы изображены на рис. 288, при

$$\text{условии } \begin{cases} t_0 = -\frac{b}{2a}, \\ t_0 \leq 1, \\ 1 < t_0 < \frac{3}{2}, \\ t_0 - 1 < 2 - t_0, \\ a < 0. \end{cases}$$

Кроме этого, при $a=0$ последовательность строго убывает, если $b < 0$.

Решая неравенства из условий, имеем:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b < 0, \\ a < 0, \\ b < -3a. \end{cases}$$

3. Из признака геометрической прогрессии $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ заключаем, что (a_n) — геометрическая прогрессия, $a_n = 2^{n-1}$.

4. Наименьший член последовательности $x_1 = \frac{1}{500} = 0,002$. См. вар. 1.

5. Решается аналогично вар. 1, только вместо r_1 берем r_2 и наоборот. Используем формулу из вар. 1 (с заменой $r_1 \leftrightarrow r_2$) $\frac{r_1}{r_2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Откуда $\frac{r_{n-1}}{r_n} = 3 - 2\sqrt{2}$ и $r_n = \frac{1}{(3-2\sqrt{2})^{n-1}} \Leftrightarrow r_n = (3+2\sqrt{2})^{n-1}$.

Задание 15.2. Предел последовательности

Вариант 1

1. а) Числитель и знаменатель выражения a_n есть суммы $(n+1)$ членов геометрических прогрессий:

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}, \quad S_n^{(2)} = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{1-3^{n+1}}{1-3}.$$

Тогда исходное выражение можно записать как $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{3^{n+1}}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0.$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot n!} = 0.$$

2. а) Нет, так как последовательность $1, 1, 1, 1, \dots$ стремится к 1, а подпоследовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Как известно, любая подпоследовательность последовательности, имеющей предел, имеет тот же предел.

б) Нетрудно показать, что $a_{n+1} > a_n$, так как $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1} + n + 1}$.

$\frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (1 - (\frac{1}{2})^{n-1}) =$
 $= \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^n$. Тогда $\frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^n+n} < 1 + \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^n < \frac{3}{2}$. Значит, последовательность ограничена, в то же время она возрастает. Поэтому последовательность имеет предел.

3. Ясно, что последовательность возрастает. Предположим, что она ограничена. Тогда она имеет предел. По свойству пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Пусть предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Тогда из $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ имеем $a = a + \frac{1}{a}$, то есть $\frac{1}{a} = 0$. Это равенство не может быть выполнено ни при каких a . Значит, неограниченная последовательность.

Вариант 2

- а) Предел равен нулю. См. вар. 1.
б) Предел равен нулю.
- а) Нет, так как подпоследовательности имеют разные пределы.
б) Последовательность монотонная и ограниченная. Поэтому имеет предел.
- Неограниченная последовательность. См. вар. 1.

Задание 15.3. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия

Вариант 1

- В числителе и знаменателе суммы n членов геометрических прогрессий:

$$S_n^{(0)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} (1 - (-\frac{1}{2})^n),$$

$$S_n^{(2)} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}} = -1 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} (1 - (-\frac{1}{2})^n).$$

Исходное выражение можно записать так: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} (-\frac{1}{2}) \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 - (-\frac{1}{2})^n} = -\frac{2}{9}.$

2. Для $a > 0$ неравенство можно переписать в виде

$$a^{\frac{1}{k}} a^{\frac{1}{k^2}} a^{\frac{1}{k^3}} a^{\frac{1}{k^4}} \dots > 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots} > 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}} > 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{k-1}} > 1.$$

Это неравенство при натуральных $k \geq 2$ выполняется, если $a > 1$.
Случай $a < 0$ не имеет смысла.

3. Если (a_n) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с первым членом a_1 и знаменателем q , то (a_n^2) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q^2 и первым членом a_1^2 . Тогда суммы последовательностей $S = \frac{a_1}{1-q}$, $S_1 = \frac{a_1^2}{1-q^2}$; по условию, $S_1 = S^2 \Leftrightarrow \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2}{(1-q)^2} \Leftrightarrow 1-q = (1-q)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} q=0, \\ q=1. \end{cases}$

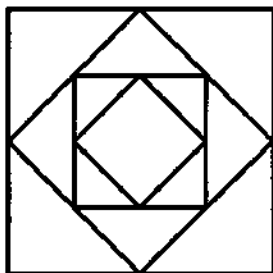


Рис. 289

При таких q прогрессия не является убывающей.

4. Пронумеруем квадраты по убыванию сторон (рис. 289). Пусть a_n — сторона n -го квадрата. Ясно, что $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2}}$. Так как $a_1 = 1$, то $a_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$.

а) Периметр n -го квадрата $P_n = \frac{4}{(\sqrt{2})^{n-1}}$.

Сумма периметров первых n квадратов

$$S_n = 4 + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} + \dots + \frac{4}{(\sqrt{2})^{n-1}} = 4 \frac{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 4 \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}^n - 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2})^n} = \frac{4(\sqrt{2}^n - 1)}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}^{n-1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(\sqrt{2}^n - 1)}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}^{n-1}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 4\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 4(2 + \sqrt{2}).$$

- б) Площадь n -го квадрата $S_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Сумма площадей первых n квадратов

$$Sum_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2(1 - (\frac{1}{2})^n). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Sum_n = 2.$$

5. Сумма членов геометрической прогрессии, начиная с $(n+1)$ -го $S_{n+1} = b_{n+1} \frac{1}{1-q}$, где b_{n+1} — $(n+1)$ -й член прогрессии. По условию $kb_n = b_{n+1} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow kb_n = b_n q \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow k = \frac{q}{1-q} \Leftrightarrow q = \frac{k}{k+1} < 1$. Если соотношение между k и знаменателем q есть $q = \frac{k}{k+1}$, прогрессия удовлетворяет условию.

Вариант 2

1. Искомый предел равен $-\frac{8}{9}$. Можно проделать вычисления, аналогичные вар. 1. Можно также использовать предел в вар. 1, числитель и знаменатель надо умножить на -1 , тогда искомый предел равен пределу в вар. 1.

2. При $a > 0$ $\sqrt[k]{a \sqrt[k]{a \sqrt[k]{a \dots}}} = a^{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots} = a^{\frac{1}{k} \frac{1}{1-\frac{1}{k}}} = a^{\frac{1}{k-1}}$. Тогда неравенство примет вид $a^{\frac{1}{k-1}} < 1$. Оно верно при $0 < a < 1$.

3. $S = \frac{a_1}{1-q}$, $S_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{1-\sqrt{q}}$; по условию, $S_1 = \sqrt{S} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{1-\sqrt{q}} \Leftrightarrow \begin{cases} q=0, \\ q=1. \end{cases}$

Прогрессия при $q=0$ и $q=1$ не является геометрической и убывающей. Не может быть убывающей прогрессии, удовлетворяющей условию.

4. Пронумеруем треугольники по убыванию стороны (рис. 290). Пусть a_n — сторона n -го треугольника. По условию, $a_1=1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. Тогда $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

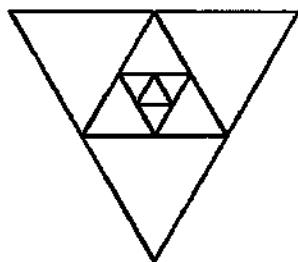


Рис. 290

а) Периметр $P_n = 3a_n = \frac{3}{2^{n-1}}$. Сумма периметров n первых треугольников

$$S_n = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{3}{2^{n-1}} = 3 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 6(1 - \frac{1}{2^n}). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 6.$$

б) Площадь n -го треугольника $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} a_n^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2n}}$, сумма площадей n первых треугольников

$$\text{Sum}_n = \frac{\sqrt{3}}{2^2} + \frac{\sqrt{3}}{2^4} + \frac{\sqrt{3}}{2^6} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \sqrt{3} \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{2^{2n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sum}_n = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. Пусть $S_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots$ — сумма членов прогрессии, начиная с b_{n+1} .
 $S_n = b_{n+1} \frac{1}{1-q}$. По условию, $b_n = kS_n \Leftrightarrow b_n = k b_{n+1} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow b_n = k b_n q \frac{1}{1-q}$,
 то есть $\frac{qk}{1-q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{k+1} < 1$. Значит, если знаменатель $q = \frac{1}{k+1}$, то
 прогрессия удовлетворяет условию.

Задание 15.4. Числовые ряды

Вариант 1

1. Рассмотрим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{1-7n} = -\frac{3}{7}$. Необходимым условием сходимости ряда является стремление к нулю членов ряда. Это условие нарушено. Поэтому ряд расходится.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{0.5}{10^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{8^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5}{10^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$. Каждая из сумм есть сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, поэтому ряд сходится.
3. $0 < a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

4. Рассмотрим предел отношения последовательных членов ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

5. Исходный ряд знакопеременный, $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = 0.$$

Значит, по признаку Лейбница ряд сходится.

6. Члены ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ расходящийся (гармонический). Поэтому исходный ряд расходится.

Вариант 2

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3-4n}{19n+7} \right| = \frac{4}{10} \neq 0$. Ряд расходится.
2. Ряд сходится как сумма геометрических прогрессий.

3. $|a_n| = \frac{\cos^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то и исходный ряд сходится.

4. Ряд сходится по признаку Даламбера. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 0$.

5. Знакопеременный ряд с a_n , такими, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 0$, сходится.

6. Рассмотрим сумму ряда, которую можно записать как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Так как $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то исходный ряд расходится.

Задание 15.5. Контрольное задание

Вариант 1

1. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots)$. В рассматриваемой сумме все дроби, кроме $\frac{1}{2}$ встречаются дважды с противоположными знаками. Поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = 0,75$.

2. $a_n = \frac{3n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} = \frac{3n^2 - 3n + 3 + 4n - 2}{n^2 - n + 1} = 3 + \frac{4n - 2}{n^2 - n + 1}$. $0 < \frac{4n - 2}{n^2 - n + 1} \leq 2$ при любых натуральных n .

а) Последовательность ограничена, $3 < a_n \leq 5$.

б) Покажем, что последовательность убывает. Действительно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(n+1)^2 + n + 2}{(n+1)^2 - n} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1} = \frac{3n^2 + 7n + 5}{n^2 + n + 1} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1} < \frac{3n^2 + 7n + 5}{3n^2 + n + 1} < 1.$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4n - 2}{n^2 - n + 1} \right) = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 2}{n^2 - n + 1} = 3.$$

3. Пусть $b_n = a_n^3$ и $a_n = a_1 q^{n-1}$, тогда $b_n = a_1^3 \cdot Q$ — геометрическая прогрессия с первым членом $b_1 = a_1^3$ и знаменателем $Q = q^3 < 1$.

а) $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_1^3 \cdot (q^3)^n = a_1^3 \frac{1}{1-q^3}$. Пусть $a_1 = 10$, $q = \frac{1}{2}$, тогда $S_2 = \frac{2000}{8}$,

$S_1 = 20$ и $S_2 > S_1$. Утверждение неверно.

б) $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{1-q} > \frac{a_1^3}{1-q^3} \Leftrightarrow \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1^3}{1-q^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{1-q} \left(1 - \frac{a_1^2}{1+q^2+q} \right) > 0$.

Например, это неравенство выполняется при любом q и таких a_1 , что $a_1 = q$. Значит, утверждение верно.

в) Это верно. Следует из предыдущего пункта.

г) Нет. Из пункта (б) следует, что для выполнения условия необходимо и достаточно, чтобы $\frac{a_1}{1-q} \left(1 - \frac{a_1^2}{1+q^2+q} \right) > 0$. Например, при $a > 2$

неравенство не является верным ни при каком $|q| < 1$.

4. Пусть O — вершина угла. Тогда $A_1O = 1$. Так как угол равен 30° , то катет $A_1A_2 = \frac{1}{2}A_1O = \frac{1}{2}$ (рис. 291). Из прямоугольного треугольника $A_1A_2A_3$

$$A_2A_3 = A_1A_2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{из треугольника } A_2A_3A_4 \\ A_3A_4 = A_2A_3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1} A_n, \quad A_n A_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1}.$$

$$\text{Длина ломаной } L = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + \dots = \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$5. \quad a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}_{n \text{ раз}}, \quad a_{n+1} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{(n+1) \text{ раз}}. \quad \text{Тогда } a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Последовательность возрастает

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} > a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}_{n \text{ раз}} > 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}_{(n-1) \text{ раз}} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}_{n \text{ раз}} > \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}_{(n-1) \text{ раз}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1$, то есть, действительно, $a_{n+1} > a_n$. Последовательность ограничена, $1 < a_n < 2$. Действительно, если рассмотрим последовательность (b_n) : $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}$,

члены которой $b_n > a_n$ легко преобразуются в последовательность $\sqrt{2}, 2, 2, 2, \dots$, ограниченную сверху числом 2, то можно сделать вывод, что $a_n < 2$. Ограниченная и монотонная последовательность имеет предел. Этот предел вычислим из равенства $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \Leftrightarrow A = \sqrt{2 + A} \Leftrightarrow A^2 = 2 + A \Leftrightarrow A^2 - A - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (A - 2)(A + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2, \\ A = -1, \\ A > 0. \end{cases}$$

Из положительности A следует, что $A = 2$. Итак, искомый предел равен 2.

Вариант 2

1. Заметим следующую закономерность: $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3})$. Тогда

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$$

В сумме все дроби, начиная с $\frac{1}{4}$, повторяются дважды с разными знаками. Поэтому сумма равна $\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{18}$ и предел равен $\frac{11}{18}$.

2. $a_n = \frac{4n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} = 3 + \frac{5n - 2}{n^2 - n + 1} < 7$.

а) Последовательность ограничена, $4 < a_n < 7$.

б) Последовательность не является монотонной. Действительно, $a_1 < a_2$ ($a_1 = 6$, $a_2 = 6\frac{1}{3}$), $a_2 > a_3$ ($a_3 = 5\frac{5}{7}$). Последовательность монотонна, начиная с a_2 , $a_2 > a_3 > a_4 > \dots$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{5n - 3}{n^2 - n + 1} \right) = 4$.

3. $S_1 = \frac{a_1}{1-q}$, $S_2 = \frac{a_1^2}{1-q^2}$, a_n^2 — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q^2 < q < 1$.

а) Рассмотрим неравенство $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{1-q} > \frac{a_1^2}{1-q^2} \Leftrightarrow 1 > \frac{a_1}{1+q} \Leftrightarrow 1+q > a_1$.

Последнее неравенство не выполняется при любых a_1 и q . Утверждение задачи неверно.

б) Да. Это следует из пункта (а). Так как $S_1 > S_2 \Leftrightarrow 1+q > a_1$, то для любого q и $a_1 < 1+q$ верно $S_1 > S_2$.

- в) Да. Для любых a_1 и q , связанных неравенством $1+q > a_1$, $S_1 > S_2$.
 г) Нет. Так как $0 < q < 1$, то $1 < q + 1 < 2$. Значит, как следует из (а), для всех $a > 2$ неравенство $S_1 > S_2$ не выполняется.

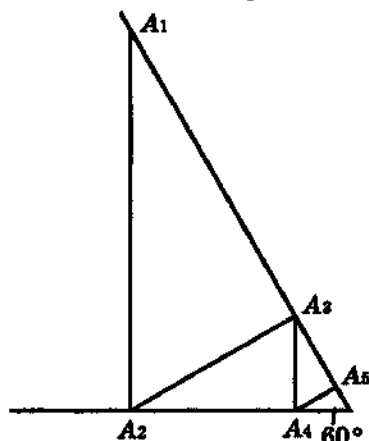


Рис. 292

4. $A_1A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_2A_3 = A_1A_2 \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $A_nA_{n+1} = \cos 60^\circ \cdot A_{n+1}A_{n+2}$. Поэтому $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Длина ломаной

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2^2} + \frac{\sqrt{3}}{2^3} + \dots = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

(рис. 292).

5. $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$, если существует предел A , то $A = \sqrt{3 + A} \Leftrightarrow A = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Докажем, что предел существует. Последовательность возрастает, $a_{n+1} > a_n$. Так как $a_{n+1} > a_n$, то $a_{n+1}^2 > 3 + a_n \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3 + \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}_{n \text{ раз}} &> 3 + \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}_{(n-1) \text{ раз}} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}_{n \text{ раз}} > \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}_{(n-1) \text{ раз}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 + \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}_{(n-1) \text{ раз}} &> 3 + \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}_{(n-2) \text{ раз}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3 + \sqrt{3} > 3 \Leftrightarrow \sqrt{3} > 0. \end{aligned}$$

$a_1 = \sqrt{3} < 3$, пусть $a_n < 3$. Тогда $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} < 3$. Значит, по методу математической индукции $a_n < 3$. Последовательность (a_n) ограничена, $0 < a_n < 3$, и монотонна, поэтому она имеет предел, который был уже вычислен.

Тема 16

ЭЛЕМЕНТЫ КОНЕЧНОЙ МАТЕМАТИКИ

Задание 16.1. Множества

Вариант 1

1. Обозначим x_ϕ — число жителей, говорящих только на французском языке, x_n — число жителей, говорящих только на немецком, x_i — число жителей, говорящих только на итальянском, $x_{\phi n}$ — число жителей, говорящих на французском и немецком языках, $x_{\phi i}$ — число жителей, говорящих на французском и

итальянском, $x_{ин}$ — число жителей, говорящих на итальянском и немецком, $x_{фни}$ — число жителей, говорящих на французском, немецком и итальянском языках. По условию, $x_{фни}=0,1x$, x — число всех жителей. Для переменных x выполняются следующие условия

$$\begin{cases} x_{ф} + x_{н} + x_{и} + x_{фн} + x_{фи} + x_{ин} + x_{фни} = x, \\ x_{ф} + x_{фн} + x_{фи} + x_{фни} = 0,8x, \\ x_{н} + x_{фн} + x_{ин} + x_{фни} = 0,7x, \\ x_{и} + x_{фи} + x_{ин} + x_{фни} = 0,6x. \end{cases}$$

Сложим последние три уравнения, тогда

$$\begin{cases} x_{ф} + x_{н} + x_{и} + x_{фн} + x_{фи} + x_{ин} = 0,9x, \\ x_{ф} + x_{н} + x_{и} + 2(x_{фн} + x_{фи} + x_{ин}) = 1,8x. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, тогда $x_{фн} + x_{фи} + x_{ин} = 0,9x$. Значит, на двух языках говорят 90% жителей.

2. Из $A \subset B$ и $A \subset C$ следует, что $A \subset (B \cap C)$. Так как $(B \cap C) \subset A$, то $A = B \cap C$.
3. Например, C — множество целых чисел, $B = \{0\}$, A — неотрицательные целые числа, X — неположительные целые числа.
4. Да. Можно использовать свойство дистрибутивности (распределительности) пересечения относительно объединения:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Тогда, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup B,$$

откуда имеем $B \cap C = B$. Это возможно, если $B \subset C$. Значит, непустые множества A, B, C существуют.

5. Пусть B — вареные, K — красные, M — мертвые раки. Тогда условие (а) означает, что $B \cap K \subset M$, условие (б) $K \cap M \subset B$. Например, это могут быть следующие множества (рис. 294). Из рисунка следует, что в этом случае $B \cap M \not\subset K$, то есть из того, что рак вареный и мертвый, не следует, что он красный.

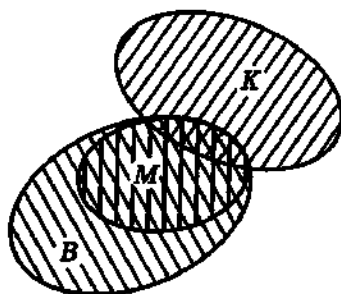


Рис. 294

Вариант 2

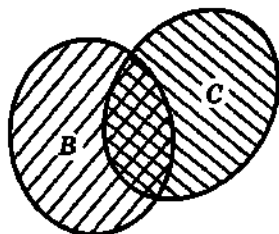


Рис. 295

1. 35%. Решение аналогично вар. 1.

2. Верно. Из условий $B \subset A$ и $C \subset A$ следует, что $(B \cup C) \subset A$. Из условия $A \subset (B \cup C)$ следует, что $A = B \cup C$. Можно нарисовать диаграмму (рис. 295).

3. Из $C \cap X = A \cup B$ следует, что $A \subset X$; из $B \cap X = C \cup A$ следует, что $X \subset A$; значит, $A = X$ и нет различных непустых множеств, удовлетворяющих условию задачи.

4. Да. Например, $A \subset C$. Тогда

$$(A \cup B) \cap C = (C \cap A) \cup (C \cap B) = A \cup (C \cap B) = (B \cap C) \cup A.$$

5. Нет, не следует. Пусть B — варенные, M — мертвые, K — красные раки. Тогда условие (а) означает $(B \cup K) \subset M$ (рис. 296а), условие (б) — $(K \cup M) \subset B$ (рис. 296б). Множества, удовлетворяющие и (а), и (б), могут быть такими, как на рис. 296в. $B \cap M \not\subset K$, то есть не следует, что варенный или мертвый рак — красный.



Рис. 296

Задание 16.2. Формула числа сочетаний

Вариант 1

1. а) Так как $201! = 200! \cdot 201$, $199! = \frac{200!}{200}$, $99! = \frac{100!}{100}$, $101! = 100! \cdot 101$, то

$$C_{201}^{100} \cdot C_{199}^{100} = \frac{201!}{100!101!} \cdot \frac{199!}{100!99!} = \frac{200! \cdot 201 \cdot 200! \cdot 100}{(100!)^2 \cdot 200 \cdot 100! \cdot 101 \cdot 100!} = \frac{(200!)^2 \cdot 201 \cdot 100}{(100!)^4 \cdot 200 \cdot 101} =$$

$$= (C_{200}^{100})^2 \cdot \frac{201}{202} < (C_{200}^{100})^2. \text{ Итак, первое число меньше.}$$

б) Обобщение: $C_{2n+1}^n \cdot C_{2n-1}^n < (C_{2n}^n)^2$.

2. Исходное уравнение равносильно следующему уравнению

$$\frac{x!}{8!(x-8)!} + \frac{x!}{4!(x-4)!} = 11 \cdot \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = \frac{11(x+1)x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) = 132(x+1)x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(4(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3) - 132(x+1)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x^2 - 133x - 130) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+10)(x-13) = 0.$$

Целое положительное решение $x = 13$.

3. $C_x^y = \frac{x!}{y!(x-y)!}$. Для решения неравенства можно использовать треугольник Паскаля (рис. 297). Решений всего 16.

4. Да, так как $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n$ — целое число и $(2n+1)! = (2n)!(2n+1)$.
5. Воспользуемся равенством $C_m^l = C_{m-1}^l + C_{m-1}^{l-1}$, которое нетрудно доказать, а именно:

$$\begin{aligned} C_{m-1}^l + C_{m-1}^{l-1} &= \frac{(m-1)!}{l!(m-l-1)!} + \frac{(m-1)!}{(l-1)!(m-l)!} = \frac{m!}{l!(m-l)!} + \frac{(m)!}{l!(m-l)!} = \\ &= \frac{m!}{l!(m-l)!} \frac{1}{m} (m-l+l) = \frac{m!}{l!(m-l)!} = C_m^l. \end{aligned}$$

В исходном равенстве используем доказанное

$$C_{n+k+1}^k = C_{n+k}^k + C_{n+k}^{k-1}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+k-1}^{k-1} + C_{n+k}^k &= C_{n+k}^k + C_{n+k}^{k-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+k-1}^{k-1} &= C_{n+k}^{k-1}. \end{aligned}$$

Далее сделаем замену $C_{n+k}^{k-1} = C_{n+k-1}^{k-1} + C_{n+k-1}^{k-2}$, тогда получим

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+k-2}^{k-2} = C_{n+k-1}^{k-2} \text{ и т. д.}$$

Придем к равенству $C_n^0 = C_n^0$. Значит, исходное равенство верно.

Вариант 2

1. (а) и (б): см. вар. 1.
2. Решение $x = 14$.
3. 15 решений. Решение аналогично вар. 1.
4. Да, так как $\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} = C_{2n-2}^{n-1}$ — целое число.
5. Задача сводится к вар. 1, так как $C_{n+k+1}^{n+1} = C_{n+k+1}^k + C_{n+k+1}^{n+1} = C_{n+1}^n$.

Задание 16.3. Комбинаторные задачи. Сочетания

Вариант 1

1. X и Y могут выбрать 5 красных шаров одинаковым числом способов. Число способов выбора 10 и 11 синих шаров из 21 одинаково (если выбрали 10, то 11 осталось, и наоборот). А выбрать из 40 зеленых шаров 20 можно большим количеством способов, чем 16 из 40. Поэтому возможностей у X больше.
2. а) Число способов выбрать 2 девушек и 3 юношей — $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$; число способов выбрать 1 девушку и 4 юношей — $C_{10}^1 \cdot C_{10}^4$; число способов выбрать 5 юношей — C_{10}^5 . Значит, число способов выбрать не больше 2 девушек равно $C_{10}^0 \cdot C_{10}^5 + C_{10}^1 \cdot C_{10}^4 + C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$ (способы выбора: 5 юношей, либо 1 девушка + 4 юноши, либо 2 девушки + 3 юноши).
- б) То же число, что и в (а), так как число юношей и девушек одинаково и задача равносильна выбору не больше двух юношей.

3. Если выбирать из 35 человек делегацию по 5 учеников, то это можно сделать C_{35}^5 способами. Чтобы найти искомое число, надо вычесть число одновременного вхождения Ольги, Саши и Жени. Это C_{32}^2 . Последнее число вычислим так: предположим, что Саша, Женя, Ольга уже в составе делегации, тогда из 32 надо выбрать 2. Т. е. искомое число равно $C_{35}^5 - C_{32}^2$.

4. Каждый из параллелограммов можно определить двумя противоположными вершинами. На рис. 298 приведены два таких параллелограмма. Значит, надо вычислить пары противоположных вершин. Положение одной вершины может быть выбрано $k \cdot k$ способами. Тогда положение противоположной — $(k-1) \cdot (k-1)$ способами. Учитывая две противоположные вершины, две другие противоположные вершины параллелограмма не нужно учитывать, поэтому имеем всего $\frac{k^2 \cdot (k-1)^2}{4}$ параллелограммов. Для ответа на вопрос надо решить неравенство $\frac{k^2 \cdot (k-1)^2}{4} > 100 \Leftrightarrow (k-1) \cdot k > 20 \Leftrightarrow k > 6$.

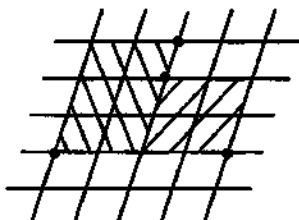


Рис. 298

Вариант 2

1. Так как число способов выбора красных и зеленых у X и Y одинаково, а число способов выбора синих у Y больше, всех способов у Y больше.
2. (а) и (б): $C_{12}^0 \cdot C_{12}^5 + C_{12}^1 \cdot C_{12}^4 + C_{12}^2 \cdot C_{12}^3 = C_{12}^5 + 12 C_{12}^4 + 66 C_{12}^3$.
3. $C_{34}^5 + C_{32}^2$. C_{34}^5 — число способов выбора делегации без Гали, C_{32}^2 — число способов выбора с Галей, Васей и Федей.
4. См. вар. 1. $\frac{k(k-1)}{2} < 10$. Откуда $k = 2; 3; 4$.

Задание 16.4. Бином

Вариант 1

1. а) По формуле бинома $(1 + \sqrt{2})^{50} = \sum_{n=0}^{50} C_{50}^n (\sqrt{2})^n$, в разложении всего 51 член, если $n = 2m$ — четное число, то член разложения $(\sqrt{2})^{2m} = 2^m$ — рациональное число, всего таких членов 26 ($n = 0; 1; \dots 25$). Значит, рациональных членов больше.
б) Общий вид члена разложения $C_{50}^n (\sqrt{2})^n$, с возрастанием n степень $(\sqrt{2})^n$ возрастает, C_{50}^n имеет наибольшее значение в случае C_{50}^{25} ($25 = \frac{50}{2}$)

и убывает с возрастанием модуля разности между 50 и n . Поэтому надо сравнить члены разложения $C_{50}^{25}(\sqrt{2})^{25}$, $C_{50}^{26}(\sqrt{2})^{26}$, $C_{50}^{27}(\sqrt{2})^{27}$, ...
 $C_{50}^n : C_{50}^{n+1} = \frac{n+1}{50-n}$, это отношение для $n \geq 25$ возрастает. Значит, C_{50}^n все быстрее убывает, в то время, как $(\sqrt{2})^n$ возрастает.

Теперь рассмотрим $C_{50}^n(\sqrt{2})^n : C_{50}^{n+1}(\sqrt{2})^{n+1} = \frac{n+1}{(50-n)\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} C_{50}^n(\sqrt{2})^n < C_{50}^{n+1}(\sqrt{2})^{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n+1}{(50-n)\sqrt{2}} < 1 \Leftrightarrow n+1 < 50\sqrt{2} - n\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1+\sqrt{2})n < 50\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow n < \frac{50\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow n < (50\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n < 101-51\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Значит, наибольшее значение n из неравенства равно 28.
 $C_{50}^{28}(\sqrt{2})^{28} : C_{50}^{29}(\sqrt{2})^{29} < 1$, откуда $C_{50}^{29}(\sqrt{2})^{29}$ — наибольший член разложения.

2. $7^{2n}-1=49^n-1=(50-1)^n-1=\sum_{k=0}^n (-1)^k 50^{n-k}-1$. Заметим, что в разложе-

нии все слагаемые, кроме последнего при $k=n$, делятся на 50. В числе $7^{2n}-1$ остаются слагаемые $(-1)^n-1$, которые могут не делиться на 50.

Если n — четное число, $(-1)^n-1=0$; число $7^{2n}-1$ делится на 50.

3. Пусть $P(x, y) = 1 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + \dots$ — многочлен $(1+2x-3y)^{1000}$ с коэффициентами 1, a_1 , a_2 , ... Рассмотрим значение $P(1, 1) = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$, оно равно сумме коэффициентов. В то же время $P(1, 1) = (1+2-3)^{1000}$. Итак, сумма коэффициентов равна нулю.

4. Действительно, $3^n = (1+2)^n = \sum_{i=0}^n 1^i 2^{n-i} C_n^i = \sum_{i=0}^n C_n^i 2^{n-i}$.

5. $(1+2x^2-3x^4)^{10} = (x^2-1)^{10}(3x^2+1)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i x^{2i} (-1)^{10-i} \cdot \sum_{j=0}^{10} C_{10}^j 3^j x^{2j} =$
 $= (1 - C_{10}^1 x^2 + C_{10}^2 x^4 - C_{10}^3 x^6 + C_{10}^4 x^8 - \dots) \cdot (1 + 3C_{10}^1 x^2 + 3^2 C_{10}^2 x^4 + \dots)$.

Коэффициент при x^8 есть

$$C_{10}^4 - 3C_{10}^1 \cdot C_{10}^3 + 3^2 C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 - 3^3 C_{10}^1 \cdot C_{10}^4 + 3^4 C_{10}^4 = 210 - 3600 + 18225 - 32400 + 17010 = -555.$$

Вариант 2

1. а) Рациональных чисел больше (см. решение вар. 1).

б) $(1+\sqrt{3})^{60} = \sum_{k=0}^{60} C_{60}^k (\sqrt{3})^k$. Наибольший член имеет номер $k > 30$.

Рассмотрим отношения $C_{60}^k : C_{60}^{k+1} = \frac{k+1}{60-k}$, $(\sqrt{3})^k : (\sqrt{3})^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Числа

C_{60}^k при $k > 30$ убывают, числа $(\sqrt{3})^k$ возрастают с ростом k .
 $C_{60}^k (\sqrt{3})^k : C_{60}^{k+1} (\sqrt{3})^{k+1} = \frac{k+1}{(60-k)\sqrt{3}}$. Если это отношение меньше 1, то $C_{60}^{k+1} (\sqrt{3})^{k+1} > C_{60}^k (\sqrt{3})^k$. Решив неравенство $\frac{k+1}{(60-k)\sqrt{3}} < 1$, можно определить номер наибольшего члена: $\frac{k+1}{(60-k)\sqrt{3}} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{60\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$. Наибольшее целое из этого неравенства $k = 37$. Значит, номер наибольшего члена $k+1 = 38$ и его значение $C_{60}^{38} (\sqrt{3})^{38} = C_{60}^{22} 3^{19}$.

2. $6^{2n} - 1 = 36^n - 1 = (37 - 1)^n - 1$. Далее, рассуждая аналогично вар. 1, приходим к выводу, что при четных n число $6^{2n} - 1$ делится на 37.
3. Сумма коэффициентов равна 0, так как $(3 - 2 - 1)^{50} = 0$ (значение многочлена при $a = b = 1$).
4. В левой части равенства биномиальное разложение $(2 - 1)^n = 1$, поэтому равенство верно.
5. Представим исходное выражение в виде бинорма следующим образом

$$\sum_{i=0}^{10} (3x^2)^i (1+2x)^{10-i} C_{10}^i$$
 (разложили $(1+2x+3x^2)^{10} = [(1+2x)+(3x^2)]^{10}$).

Члены с x^4 находятся в выражении

$$(1+2x)^{10} C_{10}^0 + (1+2x)^9 3x^2 C_{10}^1 + (1+2x)^8 9x^4 C_{10}^2.$$

откуда, выбирая член с x^4 из $(1+2x)^{10}$, член с x^2 из $(1+2x)^9$ и член x^0 с из $(1+2x)^8$, получаем коэффициент при x^4 в разложении

$$C_{10}^4 \cdot 2^4 x^4 + 3x^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_9^2 \cdot 2^2 x^2 + 9x^4 \cdot C_{10}^2 = x^4 (16 \cdot 210 + 4320 + 405) = 8085x^4.$$

Итак, искомый коэффициент равен 8085.

Задание 16.5. Формулы комбинаторики

Вариант 1

1. $A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$, $A_n^{x-1} = \frac{n!}{(n-x+1)!}$. Тогда исходное уравнение можно записать $\frac{n!}{(n-x)!} = \frac{x \cdot n!}{(n-x+1)!} \Leftrightarrow x = \frac{(n-x+1)!}{(n-x)!} \Leftrightarrow n-x+1 = x \Leftrightarrow 2x = n+1$. Откуда решение $x = \frac{n+1}{2}$, при нечетном n .

2. Так как

$$A_{xy}^2 = \frac{(xy)!}{(xy-2)!} = xy(xy-1), \quad A_{x+1}^2 = \frac{(x+1)!}{(x-1)!} = x(x+1), \quad A_{y+1}^2 = \frac{(y+1)!}{(y-1)!} = y(y+1),$$

систему можно записать в виде

$$\begin{cases} xy(xy-1)=20, \\ x(x+1)-y(y+1)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(xy-1)=20, \\ x(x+1)-y(y+1)=18, \end{cases}$$

так как $x \in N$ и $y \in N$, то $xy = 5$ и $x = 5$, $y = 1$. Эти значения, полученные из первого уравнения, второму не удовлетворяют. Система не имеет решений.

3. Так как $P_{k-1} = (k-1)!$, $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$ (это равенство доказано в задании 16.2, № 5), запишем неравенство в следующем виде

$$\frac{C_n^k \frac{(n-1)!(n-k+1)!}{n!}}{n!} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(k-1)!}{n!} (n-k+1)! \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n-k+1}{k} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{k} - 1 \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{k} \geq \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \geq k.$$

Итак, при $n \geq k$ неравенство верно.

4. а) Исходное неравенство равносильно следующему неравенству

$$\frac{100!}{(100-z)!} - \frac{100!}{z!(100-z)!} \geq 2! \Leftrightarrow \frac{100!}{(100-z)!} - \frac{100!}{z!(100-z)!} \cdot \frac{1}{z!} \geq 1 \Leftrightarrow C_{100}^z (1 - \frac{1}{z!}) \geq 1.$$

$C_{100}^z \geq 1$ при любом $0 \leq z \leq 100$, а именно: $C_{100}^0 = 1$, $C_{100}^{100} = 1$, $C_{100}^z \geq 100$ при $1 \leq z \leq 99$. $\frac{1}{2} < (1 - \frac{1}{z!}) < 1$ при $2 < z \leq 100$, $1 - \frac{1}{z!} = 0$ при $z = 1$, $z = 0$.

Значит, если $2 \leq z \leq 99$, $C_{100}^z (1 - \frac{1}{z!}) \geq 1$. Итак, искомое решение: $2 \leq z \leq 99$, $z \in N$.

б) Обобщение. Решение неравенства $A_n^z - C_n^z \geq 2$, есть $2 \leq z \leq (n-1)$, что нетрудно доказать, следуя задаче (а).

5. $\frac{m!}{(m-n)!} \Leftrightarrow (m-n+1)(m-n+2) \dots m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, ясно, что больше 5 множителей в левой части быть не может, поэтому $1 \leq n \leq 5$. Нетрудно определить, что $n=3$, $m=7$; $n=2$, $m=3$; $n=1$, $m=210$.

Вариант 2

- Решение существует при четном n , $x = \frac{n+2}{2}$.
- Система не имеет решений. См. вар. 1.
- Заменой $k=k-1$, $n=n-1$ задачу можно свести к вар. 1. Поэтому неравенство верно при $n-1 > k-1 \Leftrightarrow n \geq k$.
- а) $z \in N$, $2 \leq z \leq 89$.

б) См. обобщение в вар. 1.

5. $A_m^n = 6 \Leftrightarrow (m-n+1) \dots m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow n \leq 3$. Нетрудно найти $n=1$, $m=6$; $n=2$, $m=3$; $n=3$, $m=2$.

Задание 16.6. Комбинаторные задачи

Вариант 1

1. 10^{100} . Каждая из отдельно рассматриваемых книг может оказаться на одной из 10 полок, независимо от положения другой книги. Количества способов разложить каждую книгу перемножаются $\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{100 \text{ раз}} = 10^{100}$.
2. а) Так как цифра 0 не может быть первой цифрой, а последней должны быть 0 или 5, имеем: если 0 — последняя цифра, то всего чисел $4!$ — на первом месте любая из четырех цифр, на втором — любая из трех оставшихся, на третьем — одна из двух, на четвертом — одна цифра ($4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$); если 5 — последняя цифра, то чисел $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3^2 \cdot 2$. Итак, всего чисел $4! + 3^2 \cdot 2 = 42$.
 б) Последней цифрой могут быть две цифры, первой цифрой — четыре цифры; второй, третьей и четвертой — все пять цифр, поэтому всего $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 10^3$ чисел.
3. В слове «КОЛОВОК» 7 букв; поэтому надо использовать все буквы. Всего три буквы «О», две буквы «К» и по одной «Л» и «В». Пусть повторяющиеся буквы различаются номером: O_1, O_2, O_3, K_1, K_2 . Тогда, например, слова $K_1 O_1 L O_2 V O_3 K_2$ и $K_2 O_1 L O_2 V O_3 K_1$ — одинаковые, но составлены по-разному. Значит, в любой расстановке букв можно как угодно между собой переставить одинаковые буквы и получить одно и то же слово. Сколько различных слов? Если бы все буквы были различны, было бы $7!$ — слов, но они повторяются, поэтому всего различных слов $\frac{7!}{3!2!}$, где $3!$ — количество перестановок букв «О» между собой и $2!$ — количество перестановок букв «К».
4. Если не задавать порядок выступления некоторых участников, всего $T = 6!$ регламентов. Пусть кроме X, Y, Z еще выступают T_1, T_2, T_3 . По условию, регламенты должны быть вида T_1, Y, T_2, X, Z, T_3 , где X, Y, Z между собой нельзя переставлять, поэтому общее количество перестановок $6!$ делим на $3!$ — количество перестановок X, Y, Z . Итак, вариантов регламента всего $\frac{6!}{3!} = 5! = 120$.
5. Каждые 4 вершины дают одну точку пересечения диагоналей (рис. 299). Всего четверок вершин C_n^4 . Уравнение для n

$$C_n^4 = 495 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)4!} = 495 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-3)(n-2)(n-1)n = 11880.$$

Это уравнение можно решить подробно, но можно и «угадать» решение $n = 12$. Для подробного решения уравнение можно преобразовать:

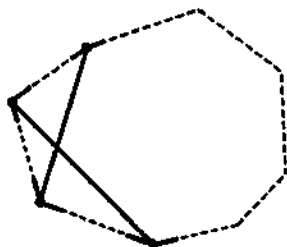


Рис. 299

$$n(n-3)(n-2)(n-1)=11880 \Leftrightarrow (n^2-3n)(n^2-3n+2)=11880 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=n^2-3n, \\ t(t+2)=11880, \end{cases} \text{ далее можно решать самостоятельно.}$$

Вариант 2

- 100^{10} .
- а) Всего 42 числа.
б) 10^3 .
- Всего $\frac{7!}{3!2!}$ слов.
- $\frac{6!2}{3!} = \frac{6!}{3}$. Всех способов выступлений $N = 6!$. Если не переставлять X , Y , Z , то их всего $\frac{6!}{3!}$, если в этих способах переставить только Y и Z , то $\frac{6!2}{3!} = \frac{6!}{3}$.
- $C_n^4 = 210 \Rightarrow n = 10$. См. вар. 1.

Задание 16.7. Подсчет вероятностей

Вариант 1

- Всего способов вытащить все n шаров $N = n!$. Благоприятный способ один. Вероятность $\frac{1}{N} = \frac{1}{n!}$.
- Имеем всего 7 костей-дублей и 4 кости с суммой очков, не меньшей 10: это 5 : 5, 6 : 5, 6 : 6, 6 : 4, среди них 2 дубля. Значит, благоприятных способов $7 + 2 = 9$. Вероятность $\frac{9}{28}$.
- Допустим, Федя выбрал одно место. Тогда Вася может выбрать одно из двух мест рядом. После их выбора остается еще 8 мест, которые могут занять 8 человек. 8 мест могут быть выбраны $8!$ способами. Федя может выбрать 10 мест, Вася — 2. Всего возможностей выбора $n = 10 \cdot 2 \cdot 8!$. Всех возможных способов выбора места $N = 10!$. Вероятность $\frac{10 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{9}$.
- Это задача на геометрические вероятности. Точки с координатами (x, y) образуют круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Благоприятные координаты:

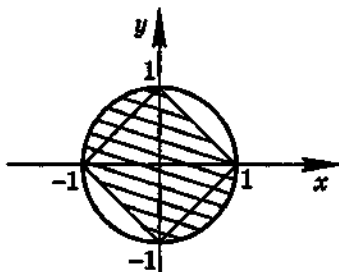


Рис. 300

$$\begin{cases} |x+y| \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

Надо найти площадь этой фигуры. Это половина площади круга плюс площадь двух треугольников с катетами, равными 1 (рис. 300).

$$S_1 = \frac{1}{2}S + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}S + 1,$$

где S — площадь круга, $S = \pi$. Вероятность того, что координаты удовлетворяют требуемым условиям, есть

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{\pi}{2} + 1}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

5. Вероятность выигрыша хотя бы на один билет определим из вероятности не выиграть ни на один билет. В первом случае это $q_1 = \frac{C_{900}^{20}}{C_{1000}^{20}}$, во втором — $q_2 = \frac{C_{980}^{100}}{C_{1000}^{100}}$. Вероятность q_1 есть отношение способов вытащить 20 билетов из 900 невыигрышных к отношению всех способов вытащить 20 билетов из 1000. Вероятность q_2 есть отношение способов вытащить 100 билетов из 980 невыигрышных к отношению всех способов вытащить 100 билетов из 1000.

$$\frac{C_{900}^{20}}{C_{1000}^{20}} = \frac{900!}{20!880!} = \frac{900!980!}{1000!880!}, \quad \frac{C_{980}^{100}}{C_{1000}^{100}} = \frac{980!}{100!880!} = \frac{900!980!}{1000!880!},$$

значит, $q_1 = q_2$. Вероятности выигрыша: $p_1 = 1 - q_1$, $p_2 = 1 - q_2$. Так как $q_1 = q_2$, $p_1 = p_2$, то вероятности равны.

Вариант 2

1. $\frac{1}{\pi!}$.
2. Количество дублей и костей с суммой очков, не большей 2, равно 9. Вероятность равна $\frac{9}{28}$.
3. Задача аналогична вар. 1. Вероятность оказаться рядом равна $\frac{2 \cdot 8 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7}$, вероятность не оказаться рядом равна $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.
4. Замена y на $-y$ сводит задачу к вар. 1 (рис. 301). Вероятность равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$.
5. Эти вероятности равны. См. вар. 1.

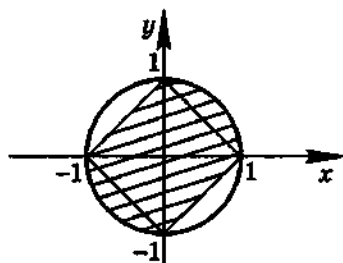


Рис. 301

Задание 16.8. Контрольное задание

Вариант 1

1. а) $A \cap X = B \cup X$ (рис. 302 а), б) $A \cup X = B \cap X$ (рис. 302 б).



Рис. 302

Из $A \cap X = B \cup X$ следует, что $B \cup X \subset A \cap X$, откуда $B \subset X$, $X \subset A$, $B \subset A$. Из $A \cup X = B \cap X$ следует, что $A \cup X \subset B \cap X$ и $A \subset X$, $X \subset B$, $A \subset B$. Сопоставляя условия $X \subset A$ и $A \subset X$, имеем $A = X$.

Также $A = B$, $B = X$, то есть $A = B = X$. Нет различных непустых множеств A , B , X , удовлетворяющих условию.

2. Исходное неравенство равносильно следующему неравенству

$$\frac{x!(5-x)!}{5!} - \frac{x!(6-x)!}{6!} > \frac{7x!(7-x)!}{10 \cdot 7!} \Leftrightarrow \frac{(5-x)!}{5!} - \frac{(6-x)!}{6!} > \frac{(7-x)!}{10 \cdot 6!}.$$

Делим неравенство на $\frac{(5-x)!}{5!}$ и получаем $1 - \frac{6-x}{6} > \frac{(7-x)(6-x)}{60}$, то есть $x^2 - 23x + 42 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 21$. Но так как $x \leq 5$, целые $x = 3; 4; 5$.

3. Четвертый член разложения $-C_5^3 \cdot x^6$, третий член разложения

$$C_5^2 \cdot x^4. \text{ Надо решить неравенство } C_5^3 \cdot x^6 \geq C_5^2 \cdot x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

4. $\sum_{i=0}^{10} 10^i C_{10}^i = \sum_{i=0}^{10} 1^{10-i} 10^i C_{10}^i = (1+10)^{10} = 11^{10}$.

5. Ясно, что цифра 7 — последняя. Искомое число меньше 10^4 , имеет не более четырех знаков. Число меньше 10 — одно 7. Чисел от 11 до 99 может быть три. Последняя цифра — 7, первая — любая из 4, 6, 7 ($9 = 3 \cdot 3$). Чисел от 100 до 999 всего девять ($9 = 3 \cdot 3$). Чисел от 1000 до 9999 может быть двадцать семь. Последняя цифра 7, первые три — любые из 4, 6, 7 ($27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$). Итак, всего чисел $1 + 9 + 27 + 3 = 40$.

6. Так как черные шары могут оказаться только рядом с белыми, то мест у одного черного шара 101. Из этих мест надо занять 50. Всего способов C_{101}^{50} .

7. Вероятность выигрыша в одной партии — $p = \frac{1}{2}$. Вероятность выиграть три партии из четырех — $C_4^3 \cdot p^3(1-p) = \frac{1}{4}$. Вероятность выиграть шесть из восьми — $C_8^6 \cdot p^6(1-p)^2 = \frac{7}{64}$. Вероятность выиграть три партии из четырех больше.

Вариант 2

(решение аналогично вар. 1)

1. Нет таких непустых множеств.

2. $x = 3$ или $x = 4$.

3. $\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq -1. \end{cases}$

4. $(1 + \frac{1}{10})^{10} = 1,1^{10}$.

5. 40.

6. C_{101}^{50} .

7. Первая возможность вероятнее.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.	3
Тема 1. Общие свойства функций.	7
Тема 2. Предел, непрерывность, производная	16
Тема 3. Интеграл и простейшие дифференциальные уравнения	25
Тема 4. Тригонометрические функции	38
Тема 5. Начала анализа для тригонометрических функций	44
Тема 6. Тригонометрические уравнения и неравенства	50
Тема 7. Теорема сложения и следствия из нее	55
Тема 8. Обратные тригонометрические функции	61
Тема 9. Показательная функция	67
Тема 10. Логарифмическая функция	73
Тема 11. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы уравнений.	79
Тема 12. Вещественные и комплексные числа	89
Тема 13. Многочлены	94
Тема 14. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств	100
Тема 15. Последовательности и ряды	112
Тема 16. Элементы конечной математики	117
Ответы и решения	125